Barem clasa a IX-a
(OLM 2014-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I.

a) $a,b,c \in (0,\infty) \Rightarrow a+b+c > a+b \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}$. Apoi, $\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c} \Leftrightarrow$
$a^2+ab+ac < a^2+ac+ab+bc \Leftrightarrow 0 < bc$ „A”. **(20p)**

b) Aplicând inegalitatea de la a) pentru fiecare fracție şi adunând membru cu membru obținem inegalitatea cerută. **(15p)**

c) Se arată că $\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}, \frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}$ şi celelalte. Procedând ca la b) obținem $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$, deci propoziția este falsă. **(5p)**

Subiectul II.

Din ipoteză rezultă : $(a-1)+(b-1)+(c-1)=1$. Conform inegalității lui Cauchy-Buniakowski, avem:

$$\left(\sqrt{ab}\cdot\sqrt{c-1}+\sqrt{bc}\cdot\sqrt{a-1}+\sqrt{ca}\cdot\sqrt{b-1}\right)^2 \le \left[\left(\sqrt{ab}\right)^2+\left(\sqrt{bc}\right)^2+\left(\sqrt{ca}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{c-1}\right)^2+\left(\sqrt{a-1}\right)^2+\left(\sqrt{b-1}\right)^2\right]$$

sau $\left(\sqrt{ab(c-1)}+\sqrt{bc(a-1)}+\sqrt{ca(b-1)}\right)^2 \le ab+bc+ca$, de unde rezultă :

$\sqrt{ab(c-1)}+\sqrt{bc(a-1)}+\sqrt{ca(b-1)} \le \sqrt{ab+bc+ca}$.

Avem egalitate, în inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski , dacă și numai dacă $\frac{\sqrt{c-1}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{ca}}$.

Din prima egalitate rezultă $\frac{c-1}{a} = \frac{a-1}{c}$, de unde obținem $a=c$ iar din a doua egalitate rezultă $a=b$.

Deci, avem egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{4}{3}$.

(10p)

Subiectul III.

a) $k =$impar $\Rightarrow (k+1)^2 =$ nr. par. Primii termeni din sumă, incepând cu $\left[\sqrt{k^2}\right]$ şi până la $\left[\sqrt{(k+1)^2-1}\right]$ sunt in număr de $\frac{(k+1)^2-(k^2-1)}{2} = k+1$, şi sunt egali cu k. Termenii următori in număr de $\frac{(k+2)^2-1-(k+1)^2}{2} = k+1$ sunt egali cu $k+1$.

Astfel, suma din membrul stâng este egală cu $(k+1)k+(k+1)(k+1)=(k+1)(2k+1)$. **(10p)**

b) Notăm suma cu **S** şi avem:

$$\mathbf{S} = \left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{5}\right]+\ldots+\left[\sqrt{(2n+1)^2-2}\right]=(1+1)(2\cdot1+1)+(3+1)(2\cdot3+1)+\ldots+$$

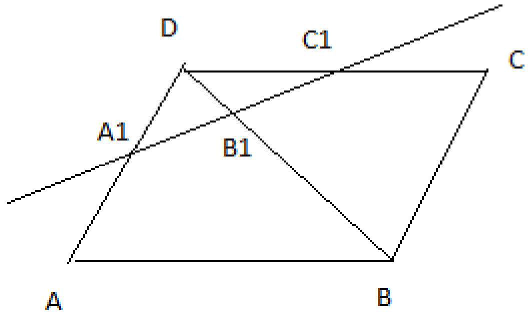
$$+(2n-1+1)[2(2n-1)+1]=2\cdot3+4\cdot7+\ldots+2n(4n-1)=\sum_{k=1}^{n}2k(4k-1)=8\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2-2\cdot\sum_{k=1}^{n}k=$$

$$=8\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)=\frac{n(n+1)(8n+4-3)}{3}=\frac{n(n+1)(8n+1)}{3}.$$

(10p)

Subiectul IV.

Considerăm baza $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right)$ şi exprimăm vectorul $\overrightarrow{DB}$ în două moduri.



Notăm raportul $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = k$, atunci $\overrightarrow{DB_1} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{DA_1} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{DC_1}$ sau, folosind ipoteza,

$b \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{1}{1+k} a \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{k}{1+k} c \cdot \overrightarrow{DC}$, de unde $\overrightarrow{DB} = \frac{a}{b(1+k)} \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{kc}{b(1+k)} \cdot \overrightarrow{DC}$. **(10p)**

Dar vectorul $\overrightarrow{DB}$ se mai scrie $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ şi cum scrierea într-o bază este unică, rezultă egalitățile $\frac{a}{b(1+k)} = 1$ şi $\frac{kc}{b(1+k)} = 1$, care prin împărțire ne conduc la $k = \frac{a}{c}$. Înlocuind, obținem relația $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$. Folosind acum inegalitatea dintre media armonică şi cea geometrică, $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} \le \sqrt{ac}$, avem $2b \le \sqrt{ac}$. **(5p)**

Egalitate avem când dreapta este paralelă cu AC. **(5p)**