INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES

S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală 14.02.2014
Clasa a V-a
Barem de evaluare

SUBIECTUL I

Pentru orice n număr natural, aflaţi restul împărţirii numărului $A=5^{n+4}\cdot 3^{n+1}+5^{n+1}\cdot 3^{n+3}+3\cdot 15^n$ la 2013.

Soluţie

$A=5^n\cdot 5^4\cdot 3^n\cdot 3^1+5^n\cdot 5^1\cdot 3^n\cdot 3^3+3\cdot 15^n$ (1p)

$A=15^n(5^4\cdot 3+5\cdot 3^3+3)$ (2p)

$A=15^n(1875+135+3)$ (2p)

$A=15^n\cdot 2013$, deci A este divizibil cu 2013. (1p)

Finalizare: restul este 0. (1p)

SUBIECTUL II

Stabiliţi dacă următoarele numere sunt pătrate perfecte:

$a=2001^2-2001-2000$;

$b=(1+2+3+...+2002)\ 3003^{2005}$;

$c=2^{2n+1}\ 5^{2n+3}-3$; $n\in \mathbf{N}$.

Soluţie

$a = 2000^2$ 2p

$b = 2003\cdot 1001^{2006}\cdot 3^{2005} \neq p^2$ 2p

$c = 10^{2n+1}\cdot 25-3\ldots$ 2p

$u(c) = 7$; $c \neq p^2$ 1p

SUBIECTUL III

Ana şi Barbu desenează pe câte o foaie de hârtie grupuri de steluțe . Ana desenează o steluță, apoi 3 steluțe apoi 5 și așa mai departe, de fiecare dată un număr impar. Barbu desenează 2 steluțe, apoi 4 steluțe, apoi 6 și așa mai departe, de fiecare dată un număr par. Arătați că, indiferent de momentul la care se vor opri din desenat cei doi copii, numărul total de steluțe desenate de Ana nu poate fi egal cu numărul total de steluțe desenate de Barbu.

Gazeta Matematică

Soluție

Numarul stelutelor desenate de Ana este:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$ 2p

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

Numarul stelutelor desenate de Barbu este:

2+4+6+…+2p=p(p+1) 2p

Se observa ca numarul stelutelor desenate de Ana este patrat perfect 2p

iar numarul stelutelor desenate de Barbu este produs de doua nr consecutive,

deci nu poate fi patrat perfect 1p

SUBIECTUL IV

Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care verifica relaţia $\overline{ab}\cdot(b^2+c^2)=2014$

Gazeta Matematică

Soluţie

$2014=2\cdot19\cdot53$ **(1p)** $\Rightarrow \overline{ab}\cdot\left(b^2+c^2\right)=2\cdot19\cdot53$ **(1p)**

Cazul I

$\overline{ab}=19\Rightarrow c^2=106-81\Rightarrow c=5\Rightarrow\overline{abc}=195$ **(3p)**

Cazul II

$\overline{ab}=38\Rightarrow c^2=53-64\Rightarrow c\notin N$ **(1p)**

Cazul III

$\overline{ab}=53\Rightarrow c^2=38-9\Rightarrow c=29$ **nu este cifră (1p)**

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală 14.02.2014
Clasa a VI-a
Barem de evaluare

SUBIECTUL I

Arătați că numarul a = $n^{65} – n^{13}$ se divide cu 10, oricare ar fi n numarul natural.

***

Soluţie

Pentru verificare n = 0 si n = 1 2p

Daca n > 1 $u(n^{65}) = u(n^{4\cdot 16+1}) = u(n)$ 2p

$u(n^{13}) = u(n^{4\cdot 3+1}) = u(n)$ 2p

$u(a) = u(n^{65} – n^{13}) = u(n) – u(n) = 0$ rezulta a este divizibil cu 10 1p

SUBIECTUL II

Se consideră numerele raționale pozitive x= $1\frac{1}{99}+2\frac{2}{99}+3\frac{3}{99}+\cdots+98\frac{98}{99}$ și y= $\frac{21}{97}+\frac{2121}{9797}+\frac{212121}{979797}$.

a) Arătați că x este pătrat perfect.
b) Comparați numerele x și y.

***

Soluţie

x= $\frac{99+1}{99}+\frac{2\cdot 99+2}{99}+\cdots+\frac{98\cdot 99+98}{99}=\frac{100+200+\cdots+9800}{99}$ **2p**

x = $\frac{100(1+2+\cdots+98)}{99}=\frac{100\cdot 98\cdot 99:2}{99}=100\cdot 49=70^2$- pătrat perfect **2p**

y = $\frac{21}{97}+\frac{21\cdot 101}{97\cdot 101}+\frac{21\cdot 10101}{97\cdot 10101}=\frac{21}{97}+\frac{21}{97}+\frac{21}{97}=\frac{63}{97}$ **2p**

x$>$ 1 și y$<$1 deci y<x. **1p**.

SUBIECTUL III

Dreptele AB si CD sunt concurente in O. Stiind ca semidreptele [OM, [OT, [OR, sunt bisectoarele unghiurilor <BOD, <DOM si respectiv, <COB, iar m(<AOM)=130^0, calculati:

a) m(<ROM);

b) m(<AOD);

c) masura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor <AOC si <BOR.

***

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

Soluţie

Desen 1p

m(<ROM) =90^{O} 2p

m(<BOM)=50^{0}= m(<DOM); m(<AOD)=80^{0} 2p

unghiul cautat =180^{0}-1/2*m(<AOC)-1/2*m(<ROB)= 1p

=180^{0}-1/2*m(<DOB)-1/2*1/2*m(<COB)=

=180^{0}-1/2*100^{0}-1/4*80^{0}=110^{0} 1p

Subiectul IV.

Demonstraţi că, oricare ar fi *n* număr natural, numărul $A = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ este divizibil cu 17.

Gazeta matematică

Soluţie

$A = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 15 \cdot 5^{2n} + 2 \cdot 2^{3n}$ (1p)

$A = 15 \cdot 25^{n} + 2 \cdot 8^{n}$ (1p)

$A = 15 \cdot (17 + 8)^{n} + 2 \cdot 8^{n}$ (2p)

$A = 15 \cdot M_{17} + 15 \cdot 8^{n} + 2 \cdot 8^{n}$ (1p)

$A = 15 \cdot M_{17} + 17 \cdot 8^{n}$ (1p)

$A \vdots 17$ (1p)

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală 14.02.2014
Clasa a VII-a
Barem de evaluare

SUBIECTUL I

Fie expresia $A = 53 \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2013\cdot 2014}\right)$.

a) Să se calculeze valoarea expresiei A.

b) Să se demonstreze că A poate fi scris in forma $\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e}$, unde suma cifrelor din numerele a, b și c este egal cu suma cifrelor din numerele d și e.

Soluție

a) $A = 53 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}\right) = 53 \cdot \left(1 - \frac{1}{2014}\right) = 53 \cdot \frac{2013}{2014} = \frac{2013}{38}$ (4p)

b) $A = \frac{2013}{38} = \frac{3\cdot 11\cdot 61}{2\cdot 19}$, (2p)

Suma cifrelor din numitor și numărător este egal cu 12. (1p)

SUBIECTUL II

ABCD dreptunghi $\Rightarrow$AB || CD $\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta ECF \Rightarrow \frac{FE}{EA} = \frac{CE}{EB} = \frac{CF}{AB} \Rightarrow \frac{EF+AE}{AE} = \frac{CF+AB}{AB}$

$\Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{DF}{AB}$ (3p)

$\Rightarrow \Delta$ ABM$\sim \Delta FMD \Rightarrow \frac{FM}{MA} = \frac{DM}{MB} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow$

$\frac{AF}{AE} = \frac{FM}{AM} = \frac{AF-AM}{AM} \Rightarrow$

(3p)

$\frac{AF}{AE} = \frac{AF}{AM} - 1 \,|\cdot \frac{1}{AF} \Rightarrow \quad \frac{1}{AM} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE}$ (1p)

SUBIECTUL III

desen 1p

teorema bisectoarei in triunghiurile ADB si ADC 4p

$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = \frac{BD}{DA} + \frac{DC}{DA} = \frac{BD+DC}{DA} = \frac{BC}{DA} = 1$ deoarece DA=BC 2p

SUBIECTUL IV

Dacă a, b, c sunt numere naturale impare, iar q este un număr raţional oarecare, arătaţi că

$$aq^2 + bq + c \neq 0$$

Soluţie

Fie $\in Q$ =>, $q = \frac{m}{n}$ unde m şi n sunt numere întregi, $n \neq 0$.

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

Atunci : $a \cdot q^2 + b \cdot q + c = a \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^2 + b \cdot \frac{m}{n} + c = \frac{a \cdot m^2 + b \cdot m \cdot n + c \cdot n^2}{n^2}$ **(1p)**

Cum numerele întregi *a, b, c* sunt impare , distingem cazurile :

$m, n\ impare \ => \ a \cdot m^2 + b \cdot m \cdot n + c \cdot n^2$ este un număr impar . **(2p)**

$m\ par, n\ impar => a \cdot m^2 + b \cdot m \cdot n + c \cdot n^2$ este un număr impar . **(2p)**

$m\ impar, n\ par => a \cdot m^2 + b \cdot m \cdot n + c \cdot n^2$ este un număr impar . **(2p)**

Deci: $a \cdot q^2 + b \cdot q + c \neq 0$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală 14.02.2014
Clasa a VIII-a
Barem de evaluare

SUBIECTUL I

a) Aduceți la o formă mai simplă expresia $(5+4)(5^2+4^2)(5^4+4^4)(5^8+4^8)...(5^{512}+4^{512})$.

b) Arătaţi că:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{7}{\sqrt{12}}+...+\frac{29}{\sqrt{210}}\geq 28$$

Soluţie

a) Fie $S=(5+4)(5^2+4^2)(5^4+4^4)(5^8+4^8)...(5^{512}+4^{512})$

$S(5-4)=(5-4)(5+4)(5^2+4^2)(5^4+4^4)(5^8+4^8)...(5^{512}+4^{512})$..........................1p

Obţinerea succesivă a diferenţelor de pătrate 2p

Finalizare

$S=(5^{512}-4^{512})(5^{512}+4^{512})=5^{1024}-4^{1024}$ 1p

b)

$m_g(a\,;b)\leq m_a(a\,;b), \forall a,b\in R$, de unde $\frac{a+b}{\sqrt{a\cdot b}}\geq 2$................................1p

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{\sqrt{2}}\geq 2\\ \frac{5}{\sqrt{6}}\geq 2\\ \vdots\\ \frac{29}{\sqrt{210}}\geq 2\end{array}\right\}\text{..1p}$$

$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+...+\frac{29}{\sqrt{210}}\geq 2\cdot 14=28$............................1p

SUBIECTUL II

Demonstrați ca oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z are loc inegalitatea:

$$2xy(2x+y)+6xz(2x+3z)+3yz(y+3z)\geq 36xyz$$

Soluţie

notăm $2x=a$, $y=b$ și $3z=c$

inegalitatea devine: $ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)\geq 6abc$ **1p**

$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2-2abc-2abc-2abc\geq 0$ **2p**

$b(a^2+c^2-2ac)+a(b^2+c^2-2bc)+c(a^2+b^2-2ab)\geq 0$ **2p**

$b(a-c)^2+a(b-c)^2+c(a-b)^2\geq 0$ adevărat deoarece este sumă de numere pozitive

... **2p**

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

SUBIECTUL III

Fie cubul ABCDA’B’C’D’, Q centrul feţei BCC’B’ şi P mijlocul muchiei (AB). Fie $DM \perp PC$, $M \in PC$. Arătaţi că:

a) dreapta DM conţine mijlocul segmentului (BC);

b) $QM \perp PC$.

Soluţie

a) Fie $BC \cap DM = \{N\}$

ΔDMC dreptunghic, m(∢DMC)=90º,

ΔCBP dreptunghic, , m(∢PBCC)=90º

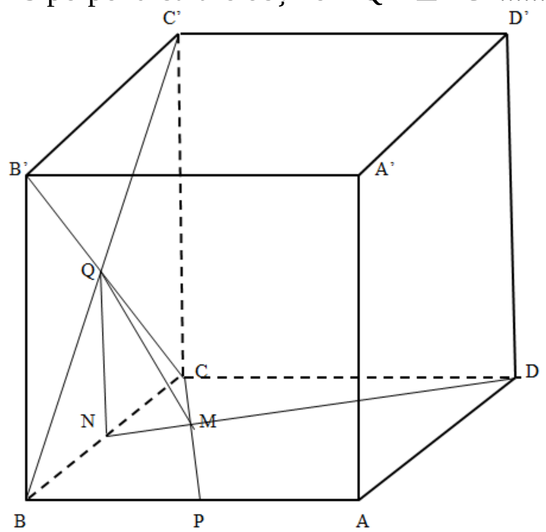
∢DCM≡∢CPB (alterne interne).

Se obţin astfel unghiurile ∢NDC şi∢ PCB congruente **2p**

Din conguenţa ΔPCB≡ΔNCD se obţine congruenţa [PB]≡[NC], deci N mijlocul segmentului (BC) **2p**

b) Din QN linie mijlocie în ΔBCC’ rezultă QN∥CC’, iar CC’⊥(ABC), deci QN⊥(ABC).……………..**1p**

Din teorema celor 3 perpendiculare obţinem $QM \perp PC$ **2p**



SUBIECTUL IV

Se consideră triunghiul ABC în care D este mijlocul segmentului BC. Dacă E este mijlocul segmentului AD, F este mijlocul segmentului BE, iar G este punctul de intersecţie a dreptelor AB şi CF, calculaţi $\frac{AG}{AB}$. **Gazeta matematică**

Soluţie

Construim $FM \| AB$ cu $M \in AD$ si $EN \| AB$ cu $N \in BC$. (1p)

Vom avea FM linie mijlocie in $\Delta EAB \Rightarrow FM = \frac{AB}{2}$ si EN linie mijlocie in $\Delta DAB \Rightarrow NE = \frac{AB}{2}$

Deci, $FM = NE = \frac{AB}{2}$ (1p)

$\Delta FGB \equiv \Delta FPE(ULU) \Rightarrow [EP] \equiv [BG]$ (1p)

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

Din (t.f.a) $\Rightarrow \Delta CPN \approx \Delta CGB \Rightarrow \frac{NP}{BG} = \frac{CN}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow NP = \frac{3 \cdot BG}{4}$ (2p)

Dar, $NE = EP + NP \Rightarrow \frac{AB}{2} = BG + \frac{3 \cdot BG}{4} \Rightarrow AB = \frac{7 \cdot BG}{2} \Rightarrow AG = \frac{5 \cdot BG}{2}$ (1p)

In final, $\frac{AG}{AB} = \frac{5}{7}$. (1p)

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a IX-a
Barem de evaluare

Problema 1:

Calculați: $\left[\frac{1^2}{2}\right] + 2^1 \cdot \left[\frac{2^2}{3}\right] + 2^2 \cdot \left[\frac{3^2}{4}\right] + \ \dots + 2^{n-1} \cdot \left[\frac{n^2}{n+1}\right]$.

Soluţie

$n - 1 < \frac{n^2}{n+1} < n$ (2p)

$\Rightarrow \left[\frac{n^2}{n+1}\right] = n - 1$ (1p)

$S = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = S_1 - S_2 = n \cdot 2^n - 2^n + 1 - (2^n - 1) = n \cdot 2^n -$
$2^{n+1} + 2$ ... (2p)

Unde am utilizat calculul:

$S_1 = 1 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} \Rightarrow$
$2S_1 = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n \Rightarrow$
$S_1 - 2S_1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n = 2^n - 1 - n \cdot 2^n (2p)$

Problema 2

Se consideră triunghiul *ABC* oarecare. Se duc : mediana *AL* corespunzătoare laturii *[BC]*, bisectoarea *LE* a unghiului $\widehat{ALC}$, bisectoarea *LF* a unghiului $\widehat{ALB}$. ($E \in AC, F \in AB$) Notăm $EF \ \cap AL = \{M\}$. Demonstrați că oricare ar fi punctul *O* din plan avem : $2 \cdot \overline{OM} = \overline{OE} + \overline{OF}$.

Soluţie

Din teorema bisectoarei rezultă: $\frac{AF}{FB} = \frac{AL}{BL}$ și $\frac{AE}{EC} = \frac{AL}{LC}$ (1p)

De unde $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} = k \Rightarrow FE \ \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{ML} = k$ (2p)

$\frac{AE}{EC} = k$ implică $\overline{OE} = \frac{1}{1+k} \cdot \overline{OA} + \frac{K}{1+k} \cdot \overline{OC}$

$\frac{AF}{FB} = k$ implică $\overline{OF} = \frac{1}{1+k} \cdot \overline{OA} + \frac{K}{1+k} \cdot \overline{OB}$ (2p)

$\overline{OE} + \overline{OF} = \frac{2}{1+k} \cdot \overline{OA} + \frac{K}{1+k} \cdot (\overline{OC} + \overline{OB}) = \frac{2}{1+k} \cdot \overline{OA} + \frac{K}{1+k} \cdot 2 \cdot \overline{OL} =$

$= 2\left(\frac{1}{1+k} \cdot \overline{OA} + \frac{K}{1+k} \cdot \overline{OL}\right) = 2 \cdot \overline{OM}$. (2p)

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

Problema 3

Se consideră numerele reale a,b,c diferite de -1 cu abc=1.

Arătaţi că dacă $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\frac{3}{2}$,

Atunci unul din numerele a,b,c este egal cu 1.

Soluţia

2[(a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(a+1)(c+1)]=3(a+1)(b+1)(c+1) (1p)

2(bc+ac+ab)+4(a+b+c)+6=3(ab+ac+bc)+3(a+b+c)+6

ab+ac+bc=a+b+c (2p)

ab-a-b+1-abc+ac+bc-c=0 (1p)

a(b-1)-(b-1)-ac(b-1)+c(b-1)=0 (1p)

(b-1)(a-1-ac+c)=0 (1p)

(b-1)(a-1)(1-c)=0

De unde rezultă concluzia. (1p)

De unde rezultă concluzia (1p)

Problema 4

Aflaţi $x>1$pentru care $\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=2014x$, unde $[x]$înseamnă partea întreagă a lui *x*, iar $\{x\}$ reprezintă partea fractionară a lui *x*.

Gazeta Matematica

Soluţie

Ecuaţia este echivalentă cu $\frac{\{x\}+[x]}{[x]\cdot\{x\}}=2014x$. (2p)

Cum $\{x\}+[x]=x$ şi $x>1$ obţinem $[x]\cdot\{x\}=\frac{1}{2014}$. (2p)

Dacă $[x]=n$, atunci $\{x\}=\frac{1}{2014n}<1$. De aici $n>\frac{1}{2014}$, adică $n\geq 1$. (2p)

În concluzie , orice $x=n+\frac{1}{2014n}$, cu $n\in\mathbf{N}^*$este soluţie a ecuaţiei. (1p)

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a X-a
Barem de evaluare

Problema 1

Calculați suma

$$S = [\lg 1] + [\lg 2] + [\lg 3] + \cdots + [\lg 10^{2014}].$$

Soluție.

Dacă $p \in \mathbb{N}$, atunci $[\lg k] = p \Leftrightarrow p \leq \lg k < p + 1$ 1p

Suma este egală cu $S = 9 \cdot \sum_{p=0}^{2013} p \cdot 10^p + 2014$ 3p

care în final este

$S = \frac{10}{9}(2013 \cdot 10^{2014} - 2014 \cdot 10^{2013} + 1) + 2014$ 3p

Problema 2

Determinați funcțiile strict crescătoare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$f\big(xf(y)\big) = f(x)y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Soluție.

Cum functia este monotona rezulta ca este injectiva. 1p
Pentru $x = y = 1$ obtinem $f(1) = 1.$ 1p
Pentru $x = 1$ obtinem. $f\big(f(y)\big) = y, \forall y \in \mathbb{R}$ 2p
Daca $a \in \mathbb{R}$ și $f(a) > a \Rightarrow f\big(f(a)\big) > f(a) \Rightarrow a > f(a)$, fals. ... 1p
Daca $a \in \mathbb{R}$ si $f(a) < a \Rightarrow f\big(f(a)\big) < f(a) \Rightarrow a < f(a)$, fals. 1p
Rezulta $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 1p

Problema 3

Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \cos A + \cos B + \cos C = 3.$$

Gazeta matematică

Soluție.

Dacă triunghiul este echilateral atunci

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$ 2p

Reciproc,

$\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \cos A + \cos B + \cos C = 3$ implică $\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \sum \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 3.$ 2p

De unde $\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \sum \frac{ab^2+ac^2-a^3}{2abc} = 3 \Rightarrow \sum \frac{ab^2+ac^2}{2abc} = 3$ 1p

$\Rightarrow ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 - 6abc = 0 \Rightarrow$

$a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(b-a)^2 = 0 \Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow a = b = c$, deci triunghiul este echilateral 1p

Problema 4:

Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ cu $\operatorname{Re} z_1 \geq 0$ și $\operatorname{Re} z_2 \geq 0$. Să se arate că $|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \geq 0$.

Gazeta matematică

Soluţie:

Avem $|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 =$ 2p

$(z_1 + \bar{z}_1) \cdot (z_2 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) =$ 3p

$= 4 \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 + |z_1 - z_2|^2 \geq 0$ 2p

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a XI-a
Barem de evaluare

Problema 1

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ astfel încât $x_2 = 1$, $x_{n+1} = \frac{n^2}{n-1}\cdot x_n$, $n\geq 2$. Dacă $S_n = \sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{x_k}$,

să se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Soluţie

Se demonstrează că şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ este pozitiv. (1p)

Avem: $x_2 = 1$

$x_3 = \frac{2^2}{1}\cdot x_2$

…………….

$x_{n+1} = \frac{n^2}{n-1}\cdot x_n$ (1p)

Prin înmulțirea relațiilor se obține: $x_{n+1} = \frac{(n!)^2}{(n-1)!}$. (1p)

Deci: $x_{n+1} = n\cdot n!, \forall n\geq 2$. (1p)

Atunci $S_n = \sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{x_k} = \sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\frac{1}{(k-1)(k-1)!} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} =$ (1p)

$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - 2$. (1p)

$\lim_{n\to\infty} S_n = e-2$. (1p)

Problema 2

Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ 13^{a_n} = 12^{a_{n-1}} + 5^{a_{n-2}},\ \forall n\geq 2.$$

Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent și să se determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Soluție

$a_0 = 0, a_1 = 1,\ 13^{a_2} = 12^{a_1} + 5^{a_0} \Rightarrow 13^{a_2} = 13 \Rightarrow a_2 = 1.$

$13^{a_3} = 12^{a_2} + 5^{a_1} \Rightarrow 13^{a_3} = 17 \Rightarrow a_3 = \log_{13} 17 > 1$. Avem $a_0 < a_1 \leq a_2 < a_3$. (1p)

Presupunem că $a_{k-1}\leq a_k, \forall k\in\{0,1,...,n-1\}$ și vom demonstra că $a_n \leq a_{n+1}$.

Avem: $13^{a_n} = 12^{a_{n-1}} + 5^{a_{n-2}}, 13^{a_{n+1}} = 12^{a_n} + 5^{a_{n-1}} \Rightarrow 13^{a_{n+1}} - 13^{a_n} = \left(12^{a_n} - 12^{a_{n-1}}\right) + \left(5^{a_{n-1}} - 5^{a_{n-2}}\right)(1)$ (1p)

Din ipoteza inducției avem: $a_{n-1}\leq a_n \Rightarrow 12^{a_{n-1}} \leq 12^{a_n} \Rightarrow 12^{a_n} - 12^{a_{n-1}} \geq 0 \quad (2)$

$a_{n-2}\leq a_{n-1} \Rightarrow 5^{a_{n-2}} \leq 5^{a_{n-1}} \Rightarrow 5^{a_{n-1}} - 5^{a_{n-2}} \geq 0 \quad (3)$

Din $(1),(2),(3) \Rightarrow 13^{a_{n+1}} - 13^{a_n} \geq 0 \Rightarrow 13^{a_{n+1}} \geq 13^{a_n} \Rightarrow a_{n+1}\geq a_n \Rightarrow$ (2p)

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este crescător $(*) \Rightarrow a_n \geq a_0, \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow a_n \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}$.

Avem $a_0, a_1, a_2, a_3 < 2$. Presupunem că $a_k < 2, \forall k \in \{0,1,...,n-1\}$ și demonstrăm că $a_n < 2$.

$13^{a_n} = 12^{a_{n-1}} + 5^{a_{n-2}} < 12^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow a_n < 2$.

Cum $0 \leq a_n < 2, \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este mărginit $(**)$. (1p)

Din $(*)$ și $(**) \Rightarrow (a_n)_{n\geq 0}$ este convergent $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$. Trecem la limită în relația de recurență $\Rightarrow 13^a = 12^a + 5^a \Rightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^a + \left(\frac{5}{13}\right)^a = 1 \quad (4)$. (1p)

Se observă că $a = 2$ este soluție a ecuației (4).

Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(a) = \left(\frac{12}{13}\right)^a + \left(\frac{5}{13}\right)^a$ este strict crescătoare, deci injectivă, soluția găsită este unică. În concluzie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. (1p)

Problema 3

Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$, unde n este impar. Să se arate că dacă $A^2 = O_n$, atunci oricare ar fi matricea $X \in M_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $AX = XA$, au loc inegalitățile:

$$\det(XA + X^2) \geq 0 \leq \det(XA - X^2).$$

Soluție

$\det(XA + X^2) \cdot \det(XA - X^2) = \det(X) \cdot \det(A + X) \cdot \det(X) \cdot \det(A - X) =$ (1p)

$= (\det(X))^2 \cdot \det(A^2 - X^2) = (\det(X))^2 \cdot \det(-X^2) =$ (1p)

$= (-1)^n \cdot (\det(X))^4 \leq 0$, deoarece n este impar. (1p)

Deci $\det(XA + X^2)$ și $\det(XA - X^2)$ sunt de semne contrare. (1) (1p)

Avem $\det(XA + X^2) = \det(A^2 + XA + X^2) = \det\left[\left(A + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}X\right)^2\right] \geq 0$. (2) (2p)

Din (1) și (2) rezultă $\det(XA + X^2) \geq 0 \leq \det(XA - X^2)$. (1p)

Problema 4. Fie șirul $(L_n)_{n\geq 1}$ dat prin $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ și $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

a) Să se determine termenul general al șirul $(L_n)_{n\geq 1}$.

b) Demonstrați egalitatea $C_n^0 \cdot L_0^2 - C_n^1 \cdot L_1^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n \cdot L_n^2 = 2^{n+1} + (-1)^n L_n$.

Gazeta Matematica

Soluție

a) Avem recurență liniară de ordinul doi cu ecuația caracteristică $r^2 = r + 1$, cu soluțiile $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ....1 punct, deci $L_n = Ar_1^n + Br_2^n$ $\forall n \in \mathbf{N}$..........1punct

Din $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ obținem $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 2puncte

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

b) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k L_k^2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]^2 =$

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k + 2(-1)^k\right] =$……………………….1 punct

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^k + 2\sum_{k=0}^{n} C_n^k =$ …………………….1 punct

$= \left(1+\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(1+\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^{n+1} = (-1)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (-1)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^{n+1} =$

$= 2^{n+1} + (-1)^n L_n$ ……………………….1 punct.

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a XII-a
Barem de evaluare

Problema 1

Fie mulțimea $G = (k, \infty)\setminus\{k+1\}, k > 0$, pe care se definește legea $*$ astfel încât: $log_a[(x * y) - k] = log_a(x - k) \cdot log_a(y - k), \forall x, y \in G, a > 0, a \neq 1$.

a) Să se determine numărul perechilor de numere întregi (k, a) pentru care elementul neutru al legii $*$ este $e = 2014$.
b) Să se verifice dacă legea $*$ este asociativă și să se determine elementul $x \in G$ care verifică relația $x = x'$, în cazul k=a+1=1005.(s-a notat cu a' simetricul lui a în raport cu legea $*$).

Soluție

Din calcul se obține: $x * y = k + (x-k)^{log_a(y-k)}, x, y \in G$. ……………..1punct

a) Din $e \in G$ element neutru se obține $x * e = e * x = x, (\forall) x \in G; x * e = x \Leftrightarrow k + (x-k)^{log_a(e-k)} = x$

$\Leftrightarrow (x-k)^{log_a(e-k)} = x - k \Leftrightarrow log_a(e-k) = 1 \Leftrightarrow e = k + a \in G$ …..2punct

$k + a = 2014, k, a \in Z, k > 0 \Rightarrow (k, a) \in \{(1{,}2013), (2{,}2012), (3{,}2011), \dots, (2013{,}1)\}$, în total 2013 perechi. ……………..1punct

b) Se verifică asociativitatea pentru k=1005, a=1004. ……………..1punct

$x * x' = e \Leftrightarrow x' = k + a^{\frac{log_a(e-k)}{log_a(x-k)}} \in G$…………..1punct

Pentru $x = x'$ obținem $log_{1004}^2(x - 1005) = 1 \Rightarrow log_{1004}(x - 1005) = 1 \Rightarrow x_1 = 2009 \in G$ sau

$log_{1004}(x - 1005) = -1 \Rightarrow x_2 = 1005 + \frac{1}{1004} \in G$………..1punct

Problema 2.

Fie $f : (0, \pi) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \cdot e^{-x}$.

Să se determine primitiva F a lui f pentru care $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Matlap

Soluție

Integrăm prin părți

$u(x) = e^{-x} \cdot \cos x$, $u'(x) = -e^{-x} \cdot (\sin x + \cos x)$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

$v'(x)=\frac{\cos x}{\sin^3 x}$, $v(x)=-\frac{1}{2\sin^2 x}$. ……………….. 2 puncte

$$F(x)=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\cdot e^{-x}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{-x}}{\sin x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot e^{-x}dx$$ ……………….. 1 punct

Fie $I=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot e^{-x}dx$. Integrăm prin părți

$g(x)=e^{-x}$, $u'(x)=-e^{-x}$

$h'(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $h(x)=-\frac{1}{\sin x}$.

De unde $I=-\frac{e^{-x}}{\sin x}--\int\frac{e^{-x}}{\sin x}dx$. …………………… 2 puncte

Deci $F(x)=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\cdot e^{-x}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{-x}}{\sin x}dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-x}}{\sin x}+\frac{1}{2}\int\frac{e^{-x}}{\sin x}dx=\frac{\sin x-\cos x}{2\sin^2 x}\cdot e^{-x}+C$ (1p)

Folosind condiția $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ obținem $C=0$.

Deci funcția căutată este $F(x)=\frac{\sin x-\cos x}{2\sin^2 x}\cdot e^{-x}$ ...... 1 punct

Problema 3

Pentru $a\in\mathbf{R}$ și $b\in\mathbf{R}^*$ considerăm funcția $f_{a+bi}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$. $f_{a+bi}(x+iy)=x+(a+ib)y$ și notăm $G=\left\{f_{a+bi}\middle|a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}^*\right\}$.

a) Să se demonstreze că G este un grup necomutativ în raport cu compunerea funcțiilor.

b) Considerăm și grupul $H=\left\{f_{a,b}\middle|a\in\mathbf{R}^*,b\in\mathbf{R}\right\}$, unde $f_{a,b}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_{a,b}(x)=ax+b$ și unde operația este de asemenea compunerea funcțiilor.

Să se demonstreze că aplicația $h:H\to G$, $h(f_{a,b})=f_{-\frac{b}{a}+\frac{1}{a}i}$ este un izomorfism de grupuri.

Soluție

a)

- Parte stabilă: $(f_{a+bi}of_{c+di})(x+iy)=f_{a+bi}(f_{c+di}(x+iy))=f_{a+bi}(x+(c+di)y)=$

$=f_{a+bi}(x+cy+dyi)=x+cy+(a+bi)dy=x+cy+(a+bi)dy=x+(c+ad+bdi)y=$

$=f_{c+ad+bdi}(x+yi)\Rightarrow f_{a+bi}of_{c+di}=f_{c+ad+bdi}$ …………….1 punct

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

- Asociativitate
- $f_{a+bi} o f_{c+di} = f_{c+ad+bdi}$ și $f_{c+di} o f_{a+bi} = f_{a+cb+bdi}$ deci compunerea nu este comutativă. **(1p)**
- Elementul neutru: f_i …………….1 punct
- $\left(f_{a+bi}\right)^{-1} = f_{-\frac{a}{b}+\frac{1}{d}i}$, …………….1 punct
- deci (G,o) grup necomutativ.

b) $\left(f_{a,b} o f_{c,d}\right)(x) = f_{a,b}\left(f_{c,d}(x)\right) = f_{a,b}(cx+d) = a(cx+d)+b = f_{ac,ad+b}(x)$ ….1 punct

$h\left(f_{a,b} o f_{c,d}\right) = h\left(f_{ac,ad+b}\right) = f_{-\frac{ad+b}{ac}+\frac{1}{ac}i}$ și $h\left(f_{a,b}\right) o h\left(f_{c,d}\right) = f_{-\frac{b}{a}+\frac{1}{a}i} o f_{-\frac{d}{c}+\frac{1}{c}i} = f_{-\frac{d}{c}-\frac{b}{ac}+\frac{1}{ac}i}$

deci *h* este morfism. …………….1 punct

h este bijectiva $\Rightarrow$ *h* este bijectiva. …………….1 punct

Problema 4

Să se determine funcția derivabilă $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ știind că $f'(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x} + e^x$, pentru orice $x>0$ și $f(1)=e$ **.**

Gazeta Matematică

Soluție

Fie funcția $g:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x\cdot e^x} - \ln x$. …………….3 puncte

Avem $g'(x) = \frac{x\cdot e^x f'(x) - \left(e^x + x\cdot e^x\right)f(x)}{\left(x\cdot e^x\right)^2} - \frac{1}{x} = \frac{f'(x) - \left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)}{x\cdot e^x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$.

…………….2 puncte

Deci *g* este constant. Cum $g(1) = \frac{f(1)}{e} = 1$, rezultă că $g(x)=1$ pentru orice $x>0$, deci

$f(x) = (1+\ln x)xe^x$ **,** $x\in(0,\infty)$ **.** …………….2 puncte

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.