Concursul de Matematică "Chindia"
Ediţia a X-a
Târgoviște, 15 Martie 2014

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie $p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât $p > 0$ și $p^2 - 4q \geq 0$. Demonstrați că soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2 + px + q = 0$ sunt situate în intervalul $\left[\frac{q}{p} - p, \infty\right)$.

Subiectul 2. Fie A o mulțime infinită de numere reale care conține cel puțin un număr rațional și cel puțin un număr irațional. Demonstrați că pentru orice număr natural $n \geq 2$, există n elemente ale mulțimii A a căror sumă este un număr irațional.

Dinu Teodorescu

Subiectul 3. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA, respectiv DAB. Demonstrați că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ are laturile paralele și congruente cu laturile patrulaterului $ABCD$.

Concursul de Matematică "Chindia"
Ediţia a X-a
Târgoviște, 15 Martie 2014

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $f\big(f(x)\big) = x + 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

a) Demonstrați că există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a < b$ și $f(a) < f(b)$.

b) Determinați funcția f, știind că în plus, $f(0) < 2$ și $f(2014) > 2014$.

Cristinel Mortici

Subiectul 2. Determinați numerele reale $a, b, c > 1$, știind că $a + b + c = 9$ și

$$\sqrt{a + \log_3 b} + \sqrt{b + \log_3 c} + \sqrt{c + \log_3 a} = 6.$$

Subiectul 3. a) Fie $\omega = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$ și $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < 1$. Demonstrați că

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} < |z - 1| + |z - \omega| + |z - \omega^2| < 6.$$

b) Fie $\zeta \in \mathbb{C}$ cu $|\zeta| = 1$. Care este probabilitatea ca $|\zeta - 1| + |\zeta - \omega| = |\zeta - \omega^2|$?

Selecție: Lect. Dr. Dinu Teodorescu și Lect. Dr. Alin Pohoață

Concursul de Matematică "Chindia"
Ediţia a X-a
Târgoviște, 15 Martie 2014

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $(a_n)_{n\geq 1} \subset (0,\infty)$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}} = 1$$

și definim șirurile

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_k)n}, \quad z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k}.$$

a) Demonstrați că șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent și aflați limita sa.

b) Demonstrați că șirul $(z)_{n\geq 1}$ este convergent și limita sa este mai mică sau egală cu $1/2$.

Dinu Teodorescu

Subiectul 2. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții cu proprietatea că $|f(x) - g(x)| \leq |xf(x)|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

i) Dacă f este continuă în punctul $x = 0$, atunci g este continuă în punctul $x = 0$.

ii) Dacă g este continuă în punctul $x = 0$, atunci f este continuă în punctul $x = 0$.

Dinu Teodorescu

Subiectul 3. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A \neq 0_{m\times n}$. Pentru fiecare indice $i \in \{1,2,\dots,m\}$, notăm cu L_i suma elementelor de pe linia i, iar pentru fiecare $j \in \{1,2,\dots,n\}$, notăm cu C_j suma elementelor de pe coloana j. Arătați că există $(p,q) \in \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\}$ cu proprietatea că $a_{pq} > 0, L_p \geq 0, C_q \geq 0$ sau $a_{pq} < 0, L_p \leq 0, C_q \leq 0$.

Selecție: Lect. Dr. Dinu Teodorescu

Concursul de Matematică "Chindia"
Ediţia a X-a
Târgoviște, 15 Martie 2014

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Determinați primitivele funcției $f : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = e^x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \ln \cos x \right).$$

Subiectul 2. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcție continuă. Demonstrați că:

$$\int_0^1 f(x)\, dx \cdot \int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)}\, dx \le \frac{1}{2}.$$

Dinu Teodorescu

Subiectul 3. Fie G un grup finit și $f: G \to G$ un morfism astfel încât mulțimea

$$A = \{x \in G \mid f(x) = x\}$$

are un singur element. Demonstrați că:

a) Funcția $g: G \to G$, definită prin legea $g(x) = x^{-1} f(x)$ este surjectivă.

b) Dacă în plus G este comutativ, atunci g este automorfism al lui G.

Selecție: Lect. Dr. Dinu Teodorescu și Lect. Dr. Georgiana Velicu