MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI BACĂU

COLEGIUL NAŢIONAL ,,FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Naţional de Matematică şi Fizică

Vrănceanu – Procopiu

Ediţia a XV –a, 2013

IX

MATEMATICĂ – SOLUŢII

1. Determinaţi toate perechile (a, b) de numere naturale nenule pentru care $a^3 + b^3$ este o putere cu exponent natural a lui 3.

Soluţie. $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, deci $a+b = 3^m, a^2-ab+b^2 = 3^n$, unde $m, n \in \mathbb{N}$ **2p**

Datorită simetriei, putem presupune $a > b$ (egalitatea $a = b$ este imposibilă). Rezultă $a = 3^m - b$ şi $3^{2m} - 3^{m+1}b + 3b^2 = 3^n$ **1p**

Fie $b = p \cdot 3^q$, cu $p, q \in \mathbb{N}$, $3 \nmid p$. Deoarece $a > 0$, $q \leq m - 1$. Pentru $q \leq m - 2$ (în cazul $m \geq 2$) obţinem că

$$3^{2m} - 3^{m+1}b + 3b^2 = 3^{2q+1}(3^{2m-2q-1} - 3^{m-q}p + p^2)$$

nu poate fi o putere a lui 3, deoarece paranteza nu este divizibilă cu 3 şi este mai mare ca 1 (dacă $x^2 - xy + y^2 \leq 1$ şi $x, y \in \mathbb{N}^*$, atunci $(x - 2y)^2 + 3x^2 \leq 4$, posibil doar pentru $x = 1, y = 1$). Deducem $q = m - 1$ şi, deoarece $b < 3^m$, $p = 1$ sau $p = 2$ **3p**

Dacă $b = 2 \cdot 3^{m-1}$ rezultă $a < b$, imposibil în cazul analizat. Obţinem astfel soluţiile $b = 3^s, a = 2 \cdot 3^s$ **2p**

Din simetrie, avem şi soluţiile $a = 3^s, b = 2 \cdot 3^s$, unde $s \in \mathbb{N}$ **1p**

Observaţie. Putem porni rezolvarea problemei şi scriind $(a + b)^3 = (a + b)\left((a + b)^2 - 3ab\right)$ pentru a dovedi că $a + b = 3^{s+1}$, $ab = 2 \cdot 3^{2s}$ şi apoi să obţinem soluţiile $\{a, b\} = \{3^s, 2 \cdot 3^s\}$.

2. Vom spune că un număr real x este *pseudoîntreg de grad* n (unde n este un număr natural nenul) dacă numărul $x^n - x$ este întreg.

Arătaţi că, dacă x este pseudoîntreg de grad 2 şi, totodată, pseudoîntreg de grad n pentru un număr natural $n \geq 3$, atunci x este număr întreg.

Soluţie. Din ipoteză avem $x^2 = x + a, a \in \mathbb{Z}$. Această ecuaţie are $\Delta = 1 + 4a$, deci $a \geq 0$ **1p**

Observăm că $x^3 = x^2+ax = (a+1)x+a$ şi, inductiv, $x^m = a_m x+b_m$, cu $a_m, b_m \in \mathbb{N}$ **3p**

Dacă $a = 0$, atunci $x = 0$ sau $x = 1$ şi problema este rezolvată. . . **1p**

Dacă $a \geq 1$, atunci $a_m > 1, \forall m \geq 3$ **1p**

Din $x^n - x = (a_n - 1)x + b_n \in \mathbb{Z}$ deducem că x este raţional **1p**

În cazul $x = \frac{p}{q}$, cu $(p, q) = 1$ şi $q > 1$ obţinem $x^2 - x = \frac{p(p-q)}{q^2}$ cu $(q, p - q) = 1$ şi $q > 1$ – contradicţie – deci x trebuie să fie întreg . . **2p**