

Clasa a VI-a

1. Se consideră fracția $F = \frac{108}{252}$. Aflați câte numere naturale sunt în mulțimea

$$M = \{F; 2 \cdot F; 3 \cdot F; \dots; 2014 \cdot F\}.$$

Barem:

2 p

$$\text{Avem } F = \frac{108}{252} = \frac{3}{7}$$

2 p

Numărul de numere naturale din M este egal cu numărul multiplilor de 7 din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 2014\}$

2 p

$$1 < 7k \leq 2014, k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{7} < k \leq \frac{2014}{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{7} < k \leq 287 \frac{5}{7} \\ k \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, \dots, 287\}$$

1 p

M are 287 de numere naturale

7 p

TOTAL

2. Se consideră șirul de numere $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $a_1 = 0$ și a_n este media aritmetică a numerelor a_{n-1} și 2014. Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai șirului.

a) Calculați a_2 și a_3 ;

b) Arătați că $S_{2014} + a_{2014}$ se poate scrie ca produsul a două numere naturale consecutive.

Barem:

1 p	a) $a_2 = \frac{a_1+2014}{2} = 1007$; $a_3 = \frac{a_2+2014}{2} = \frac{1007+2014}{2} = \frac{3021}{2}$
1 p	b) $a_n = \frac{a_{n-1}+2014}{2} \cdot 2 \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + 2014$ (*)
2 p	Scriind relația (*) pentru $n \in \{2, 3, \dots, 2014\}$ și ținând seama că $2a_1 = 0$ se obține: $\begin{array}{ll} & 2a_1 = 0 \\ n = 2; & 2a_2 = a_1 + 2014 \\ n = 3; & 2a_3 = a_2 + 2014 \\ n = 4; & 2a_4 = a_3 + 2014 \\ \dots & \dots \\ n = 2014 & 2a_{2014} = a_{2013} + 2014 \end{array}$
1 p	Însumând pe membri, obținem: $2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \dots + 2a_{2014} = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2013}) + 2013 \cdot 2014$
1 p	sau $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2014}) + (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2013}) + a_{2014} = S_{2013} + 2013 \cdot 2014$
1 p	$S_{2014} + S_{2013} + a_{2014} = S_{2013} + 2013 \cdot 2014 \mid - S_{2013} \Rightarrow$ $S_{2014} + a_{2014} = 2013 \cdot 2014 \text{ (produs de numere consecutive)}$
7 p	TOTAL

3. a) Raportul dintre măsura complementului unui unghi și măsura suplementului său este $\frac{1}{4}$.
Aflați măsura unghiului.

b) Fie unghiul ascuțit \widehat{AOB} și unghiurile \widehat{BOC} și \widehat{BOD} astfel încât \widehat{AOB} și \widehat{BOC} sunt adiacente complementare iar \widehat{AOB} și \widehat{BOD} sunt adiacente suplementare, [OP semidreapta opusă semidreptei [OB, [OM – bisectoarea unghiului \widehat{BOC} , [ON – bisectoarea unghiului \widehat{AOP} .
Arătați că măsura unghiului \widehat{MON} este de 135° .

prof. Pop Ionela
Școala Gimnazială Culciu Mare

Barem:

1 p	a) Fie x măsura unghiului \widehat{MON} . Complementul: $90 - x$, suplementul $180 - x$.	
1 p	$\frac{90-x}{180-x} = \frac{1}{4}$	
2 p	$4 \cdot (90 - x) = 180 - x, x = 60^\circ$	
1 p	b) Notăm măsurile unghiurilor ca în figură: $a + b = 90^\circ$ $m(\widehat{AOP}) = 180^\circ - a$	
1 p	$m(\widehat{AON}) = 90^\circ - \frac{a}{2}$	
1 p	$m(\widehat{MON}) = \frac{b}{2} + a + 90^\circ - \frac{a}{2} = \frac{a+b}{2} + 90^\circ = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$	
7 p	TOTAL	

4. Pe segmentul (AB) se consideră punctele $M_1, M_2, \dots, M_{2014}$ astfel încât $AM_1 = \frac{AB}{2}$; $AM_2 = \frac{AM_1}{2}$; $AM_3 = \frac{AM_2}{2}$; \dots ; $AM_{2014} = \frac{AM_{2013}}{2}$.

a) Exprimați $AM_1, AM_2, AM_3, \dots, AM_{2014}$ cu ajutorul lui AB;

b) Calculați suma $S = (AM_1 + AM_2 + AM_3 + \dots + AM_{2014}) + 1$ știind că $AB = 2^{2014}$.

Barem:

2 p	<p>a) $AM_1 = \frac{1}{2}AB$; $AM_2 = \frac{1}{2}AM_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{AB}{2^2}$; $AM_3 = \frac{1}{2}AM_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}AB = \frac{AB}{2^3}$; \dots;</p> <p>$AM_{2014} = \frac{AB}{2^{2014}}$.</p>
2 p	<p>b) $S = \left(\frac{AB}{2} + \frac{AB}{2^2} + \dots + \frac{AB}{2^{2014}}\right) + 1 = \frac{AB}{2^{2014}} \cdot (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2013}) + 1$</p> <p>$AB = 2^{2014} \Rightarrow S = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2013}) + 1$</p>
2 p	<p>Fie $a = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2013} \mid \cdot 2$</p> <p>$2a = 2 + 2^2 + \dots + 2^{2014}$</p> <p>$2a - a = (2 + 2^2 + \dots + 2^{2014}) - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2013})$</p> <p>$a = 2^{2014} - 1$</p>
1 p	<p>Finalizare:</p> <p>$S = 2^{2014} - 1 + 1 = 2^{2014}$</p>
7 p	TOTAL

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.