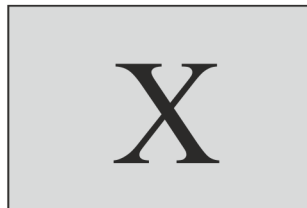


MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE  
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU  
COLEGIUL NAȚIONAL „FERDINAND I” – BACĂU

Concursul Național de Matematică și Fizică

Vrănceanu – Procopiu

Ediția a XV –a, 2013



## MATEMATICĂ – SOLUȚII

1. Determinați valorile extreme ale funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x - 3}{\cos x + 2}.$$

*Soluție.* Determinăm imaginea funcției  $f$ :  $y$  aparține lui  $f(\mathbb{R})$  dacă și numai dacă ecuația  $\sin x - y \cos x = 2y + 3$  are soluții. .... **3p**

Folosind, de exemplu, metoda unghiului auxiliar, se arată că acest lucru se petrece dacă și numai dacă  $(2y + 3)^2 \leq y^2 + 1$ . .... **3p**

Obținem că  $f(\mathbb{R}) = \left[-2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, -2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ , prin urmare  $f_{\min} = -2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ , iar  $f_{\max} = -2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . .... **3p**

2. Fie  $a$  un număr natural cel puțin egal cu 2 și  $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ . Demonstrați că, oricare ar fi numărul natural nenul  $n$ , există un număr natural  $b$ ,  $b \geq 2$ , astfel încât  $x^n = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}$ .

*Soluție.* Observăm că  $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$  dacă și numai dacă  $x$  este supraunitar și  $x + \frac{1}{x} = a$ . .... **4p**

Se demonstrează că, dacă  $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{N}$ , atunci  $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{N}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ . .... **3p**

Fie  $x^n + \frac{1}{x^n} = b \in \mathbb{N}$ ; evident că  $b \geq 2$ . Cum  $x > 1$ , rezultă că  $x^n > 1$ , prin urmare  $x^n = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}$ . .... **2p**