Olimpiada de matematică

etapa locală

16.02.2014

Clasa a XI-a

1. Fie A,B ∈ M_n(C). Să se arate că egalitatea AB – BA = I_n este imposibilă.

Muntean Doina, Satu Mare

Barem:

1 p	Presupunem prin absurd că $AB - BA = I_n \Rightarrow$
1 p	$Tr\,(AB - BA) = Tr\,(I_n)$ (1)
2 p	Dar $Tr\,(A + B) = Tr\,(A) + Tr\,(B)$ şi $Tr\,(AB) = Tr\,(BA)$
1 p	Atunci în egalitatea (1): $Tr\,(AB) - Tr\,(BA) = 0$
1 p	Cum $Tr\,(I_n) = n \Rightarrow$ contradicţie
1 p	$\Rightarrow$ egalitatea $AB - BA = I_n$ este imposibilă.
7 p	**TOTAL**

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

2. a) Fie $A \in M_2(C)$. Arătaţi că $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA)x + \det A$, pentru orice $x \in C$.

b) Dacă $A \in M_2(C)$ cu $TrA = 2$ şi $\det A = 3$ demonstraţi că:

$$\det(A^2 + I_2) + \det(A^2 + 3I_2) = 20.$$

Traian Tămîian, Carei

Barem:

2 p	a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(C)$. Avem $\det(A - xI_2) =$ $\begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc =$
1 p	$= x^2 - (TrA)x + \det A$
1 p	b) Fie $f_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (TrA)x + \det A = x^2 - 2x + 3$ polinomul caracteristic al matricei A. Din teorema Hamilton-Cayley rezultă: $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + 3I_2 = 2A$ (1)
1 p	Din (1) rezultă $\det(A^2 + 3I_2) = \det(2A) = 2^2 \cdot \det A = 4 \cdot 3 = 12.$
1 p	Am arătat că $\det(A^2 + 3I_2) = 12$ (2) Tot din (1) obţinem: $A^2 + I_2 = 2(A - I_2)$ de unde rezultă $\det(A^2 + I_2) = 2^2 \cdot \det(A - I_2) = 2^2 \cdot f_A(1)$ şi cum $f_A(1) = 2$ obţinem $\det(A^2 + I_2) = 8$ (3)
1 p	Din (2) şi (3) obţinem: $\det(A^2 + I_2) + \det(A^2 + 3I_2) = 12 + 8 = 20.$
7 p	**TOTAL**

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir definit prin: $a_1 = \sqrt{2013}$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2013}{2014}, \forall n \in N^*$.

a) Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi $1 \leq a_n \leq 2013, \forall n \in N^*$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 1)$

Traian Tămâian , Carei

Barem:

1p	a) Dacă notăm $2013 = k$ atunci $a_1 = \sqrt{k}$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + k}{1+k}, \ \forall n \in N^*$. Rezultă $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n^2 - (1+k)a_n + k}{1+k} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \dfrac{(a_n - 1)(a_n - k)}{1+k}$
1p	Vom demonstra prin inducţie matematică propoziţia: $P(n): 1 \leq a_n \leq k, \ \forall n \in N^*$ (2)
1p	Cum $P(1)$ este adevărată, presupunând P(n) adevărată avem: $1 = \dfrac{1+k}{1+k} \leq \dfrac{a_n^2 + k}{1+k} \leq \dfrac{k^2 + k}{1+k} = \dfrac{k(k+1)}{1+k} = k$, de unde rezultă $1 \leq a_{n+1} \leq k, \ \forall n \in N^*$. Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1), \ \forall n \in N^*$ şi conform metodei inducţiei matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată $\forall n \in N^*$,
1p	Din (1) şi (2) obţinem $a_{n+1} - a_n \leq 0, \ \forall n \in N^*$ şi rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi deci este şi monoton. Din (2) rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.Conform teoremei lui Weierstrass rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi deci există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda \in [1, k]$.
1p	Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lambda$ şi trecând la limită în relaţia din enunţ obţinem: $\lambda = \dfrac{\lambda^2 + k}{1+k} \Leftrightarrow$ $(\lambda - 1)(\lambda - k) = 0$, de unde rezultă $\lambda \in \{1, k\}$. Cum $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi $\lambda \in \{1, k\}$. rezultă că $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
1p	b) Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 1)$. Aplicând teorema Cesaro-Stolz şi folosind (1) rezultă $L = \lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_n - 1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1) - n}{\dfrac{1}{a_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{a_n - 1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}{a_n - a_{n+1}} =$
1p	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}{-\dfrac{(a_n - 1)(a_n - k)}{1+k}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a_{n+1} - 1)(1+k)}{k - a_n} = \dfrac{(1-1)(1+k)}{k-1} = 0.$
7 p	**TOTAL**