MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI BACĂU

COLEGIUL NAŢIONAL ,,FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Naţional de Matematică şi Fizică

Vrănceanu – Procopiu

Ediţia a XV –a, 2013

XI

MATEMATICĂ – SOLUŢII

1. Se consideră un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin $x_0 \in [0,6]$ şi $x_{n+1} = \sqrt{6-x_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Studiaţi convergenţa şirului şi aflaţi-i limita, în cazul când aceasta există.

Soluţie. Observăm că $x_{n+2} = \sqrt{6-\sqrt{6-x_n}}$, de unde reiese imediat că diferenţele $x_{n+4} - x_{n+2}$ şi $x_{n+2} - x_n$ au acelaşi semn, ceea ce arată că subşirurile (x_{2n}) şi (x_{2n+1}) sunt monotone. **4p**

De asemenea, ele sunt mărginite, fiind incluse în $[0,6]$. **2p**

Dacă $(x_{2n}) \to \ell$, $\ell \in [0,6]$, atunci $\ell = \sqrt{6-\sqrt{6-\ell}}$, de unde $6-\ell^2 = \sqrt{6-\ell}$, apoi $\ell^4 - 12\ell^2 + \ell + 30 = 0$ şi $\ell^2 \leq 6$. Obţinem $(\ell-2)(\ell+3)(\ell^2-\ell-5) = 0$, cu singura soluţie acceptabilă $\ell = 2$, deci $(x_{2n}) \to 2$. În mod similar subşirul (x_{2n+1}) are limita 2, deci limita şirului este 2, oricare ar fi x_0. .... **3p**

2. Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$, cu $\det(A) \neq 0$.

a) Arătaţi că, dacă $X \in M_2(\mathbb{C})$ şi $AX = O_2$, atunci $X = O_2$.

b) Arătaţi că, dacă $B, C \in M_2(\mathbb{C})$ şi $AB = CA$, atunci $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} C$.

(Dacă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, atunci $\operatorname{tr} X = x + t$).

Soluţie. a) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, atunci $AX = O_2$ implică $ax + bz = 0$ şi $cx + dz = 0$, de unde $(ad - bc)x = 0$, deci $x = 0$; analog $y = z = t = 0$... **2p**

b) Ştim că $B^2 - (\operatorname{tr} B)B + \det(B)I_2 = O_2$ şi analog pentru C ... **2p**

Din ipoteză rezultă $\det B = \det C$ şi $AB^2 = A(BB) = (AB)B = (CA)B = C(AB) = C(CA) = C^2A$.............................. **2p**

Deducem $AB^2 - (\operatorname{tr} B)AB + \det(B)A = O_2 = C^2A - (\operatorname{tr} C)CA + \det(C)A$, deci $(\operatorname{tr} B - \operatorname{tr} C)AB = O_2$. Astfel, dacă $AB \neq O_2$, atunci $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} C$, iar dacă $AB = CA = O_2$, atunci $B = C = O_2$, deci, din nou, $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} C$.. **3p**

Observaţie. Dacă folosim noţiunea de inversă a unei matrice, atunci $AX = O_2 \Rightarrow A^{-1}AX = O_2 \Rightarrow X = O_2$, iar egalitatea $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$, valabilă oricare ar fi $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ conduce la $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A^{-1}CA) = \operatorname{tr}(AA^{-1}C) = \operatorname{tr}(C)$.