MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI BACĂU

COLEGIUL NAŢIONAL ,,FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Naţional de Matematică şi Fizică

Vrănceanu – Procopiu

Ediţia a XV –a, 2013

XII

MATEMATICĂ – SOLUŢII

1. Determinaţi perechile de funcţii (f, g), unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă, iar

$$\int \cos f(x)\, \mathrm{d}x = \sin g(x) + \mathcal{C} \quad \text{şi} \quad \int \sin f(x)\, \mathrm{d}x = -\cos g(x) + \mathcal{C}.$$

Soluţie. Derivând membru cu membru relaţiile din ipoteză, obţinem $\cos f(x) = g'(x) \cos g(x)$ şi $\sin f(x) = g'(x) \sin g(x)$. Ridicând la pătrat şi adunând membru cu membru, deducem că $g'(x) \in \{-1, 1\}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **3p**

Funcţia g' are proprietatea lui Darboux, prin urmare $g'(x) = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sau $g'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ **2p**

În primul caz $g(x) = -x + a$, $a \in \mathbb{R}$ şi $f(x) = g(x) + \pi + 2k_x\pi$, $k_x \in \mathbb{Z}$; cum f este continuă, deducem $k_x =$ constant **2p**

În al doilea caz $g(x) = x + a$, $a \in \mathbb{R}$ şi $f(x) = g(x) + 2k_x\pi, k_x \in \mathbb{Z}$; ca mai sus, k_x nu depinde de x **2p**

2. Considerăm monoidul $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \cdot)$, A o matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ şi mulţimea $G(A) = \{M_k \mid M_k = I_n + kA,\ k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

a) Dacă $A^2 = O_n$, demonstraţi că $(G(A), \cdot)$ este grup abelian.

b) Ştiind că $M_1, M_2, \ldots, M_{2n}$ sunt elemente inversabile ale monoidului $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \cdot)$, arătaţi că toate matricele din $G(A)$ sunt elemente inversabile ale monoidului $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \cdot)$.

Soluţie. a) Se observă că $M_k \cdot M_l = M_{k+l}$, $\forall k, l \in \mathbb{Z}$ şi, folosind această relaţie, se arată imediat că $(G(A), \cdot)$ este grup abelian. .. **3p**

b) O matrice M din $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ este element inversabil al monoidului $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \cdot)$ dacă şi numai dacă $\det M = \pm 1$. **1p**

Considerăm polinomul $P(X) = \det(I_n + XA) \in \mathbb{Z}[X]$, de grad cel mult n. Pentru fiecare $s \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$, avem: M_s este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det M_s = \pm 1 \Leftrightarrow P(s) = \pm 1$. **1p**

Prin urmare, există cel puţin $n + 1$ numere s în care P ia valoarea 1 sau cel puţin $n + 1$ numere s în care P ia valoarea -1; ne plasăm în prima situaţie, în cea de-a doua raţionamentul fiind analog. Polinomul $Q = P - 1$, de grad cel mult n, se anulează de cel puţin $n + 1$ ori, deci este polinomul nul. Astfel, $P = 1$, aşadar $\det(I_n + kA) = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ şi, de aici, concluzia problemei. **(4 puncte)**