**MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE**

**INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI BACĂU**

**COLEGIUL NAŢIONAL ,,FERDINAND I'' – BACĂU**

**Concursul Naţional de Matematică şi Fizică**

**Vrănceanu – Procopiu**

**Ediţia a XV –a, 2013**

XII

# MATEMATICĂ – SUBIECTE

**1.** Determinaţi perechile de funcţii $(f, g)$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă, iar

$$\int \cos f(x)\, \mathrm{d}x = \sin g(x) + \mathcal{C} \quad \text{şi} \quad \int \sin f(x)\, \mathrm{d}x = -\cos g(x) + \mathcal{C}.$$

**2.** Considerăm monoidul $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \cdot)$, $A$ o matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ şi mulţimea

$$G(A) = \{M_k \mid M_k = I_n + kA,\ k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}).$$

a) Dacă $A^2 = O_n$, demonstraţi că $(G(A), \cdot)$ este grup abelian.

b) Ştiind că $M_1, M_2, \ldots, M_{2n}$ sunt elemente inversabile ale monoidului $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \cdot)$, arătaţi că toate matricele din $G(A)$ sunt elemente inversabile ale monoidului $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \cdot)$.