INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
BRĂILA

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014
CLASA A IX-A
PROFIL ŞTIINŢE ALE NATURII

1.Rezolvaţi ecuaţiile:

a) în mulţimea numerelor reale pozitive ecuaţia $2x^2-3xy-2y^2=0$.

b) $5|x|^2-6|x|+1=0$, unde $|x|$ reprezintă modulul numărului real x;

c) $5[x]^2-6[x]+1=0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

2. a) Demonstraţi că $\left[\sqrt{n(n+1)}\right]=n,\ \forall n\in N^*$.

Arătaţi că $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]+...+\left[\sqrt{2013\cdot 2014}\right]=1007\cdot 2013$.

3. Se considera paralelogramul ABCD si punctele E si F astfel incat $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BE}$ si $\overrightarrow{FD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FA}$.

Demonstrati ca : punctele C, E, F sunt coliniare

$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}$, unde A' este simetricul punctului A fata de punctul E.

4. Pe o hârtie este scrisă la început o listă de numere naturale distincte. O continuare a listei înseamnă alegerea a două numere dintre cele existente şi scrierea pe listă a celui mai mic multiplu comun al acestora, cu condiţia ca el să nu fie deja scris. Spunem că lista s-a închis dacă nu mai există nici o continuare posibilă a sa (de exemplu, lista 2, 3, 4, 6 se închide după ce-l adăugăm pe 12). Care este numărul maxim de numere car pot apărea pe o listă care s-a închis, dacă la început lista conţinea 10 numere?

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii . Fiecare subiect este notat de la 0 la7.
Timp de lucru trei ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
BRĂILA

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014
CLASA A X-A
PROFIL ŞTIINŢE ALE NATURII

1. Fie numerele reale a, b,c pozitive cu $a+b+c \le 2\sqrt{2}$. Să se arate că:

a) $2ab\sqrt{2\left(a^4+b^4\right)} \le \left(a^2+b^2\right)^2$

b) $\dfrac{\sqrt{a^4+b^4}}{\left(a^2+b^2\right)^2}+\dfrac{\sqrt{b^4+c^4}}{\left(b^2+c^2\right)^2}+\dfrac{\sqrt{a^4+c^4}}{\left(a^2+c^2\right)^2} \le \dfrac{1}{abc}$

2. Se consideră expresia:

$E(x)=\dfrac{1}{2}\log_3\left(\dfrac{1}{x^4}\right)+\dfrac{1}{\log_{3x^2} 3}+\dfrac{1}{4}\log_{\sqrt{3}} x^4-2\log_3\sqrt{3}$, oricare $x \in \mathbf{R}\text{-}\left\{0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

a) Să se arate că $E(x)=2\log_3 x$, oricare $x \in \mathbf{R}\text{-}\left\{0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

b) Să se demonstreze că $E(x+1)-E(x)>0$.

3.Dacă $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

a) Calculaţi z^2 si z^{2014}

b) Dacă $S_1=\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{2\pi}{4}+\cos\dfrac{3\pi}{4}+\ldots+\cos\dfrac{2014\pi}{4}$

$S_2=\sin\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{2\pi}{4}+\sin\dfrac{3\pi}{4}+\ldots+\sin\dfrac{2014\pi}{4}$

Să se calculeze S_1 şi S_2.

4. Fie numerele $x=2014^{\frac{a-b}{ab}}\cdot 2014^{\frac{b-c}{bc}}\cdot 2014^{\frac{c-a}{ca}}$ unde a,b,c $\in \mathrm{N}^*$, ab,,bc,ca ≥ 2

si $y=4\cdot\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}^{-1}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}^{-1}\right)^2}{\left(2-2^{-2}\right)^2-\left(2+2^{-2}\right)^2}$.

Calculati $(x-y-5)^{2014}+(-x+y+5)^{2014}$

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii . Fiecare subiect este notat de la 0 la7.
Timp de lucru trei ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
BRĂILA

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014
CLASA A XI-A
PROFIL ŞTIINŢE ALE NATURII

1. Fie funcţia $f: R \to R$ $f(x) = 4x^2 - 1$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ şi numerele distincte $a, b, c \in Z$, abscisele punctelor A,B,C de pe graficul funcţiei f.

a) Să se calculeze determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

b) Arătaţi că aria triunghiului ABC este număr natural.

2.Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{pmatrix}, x \in R$. Determinaţi matricea A^n, unde $n \in N^*$.

3. Se consideră ecuaţia $\begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2a} \end{vmatrix} = 0$, unde $a \in R$. Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care rădăcinile reale ale ecuaţiei sunt de semne contrare.

4. Se consideră numerele reale nenule a_1, a_2, a_3 astfel încât $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.
Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_1\sqrt{x+a_1} + a_2\sqrt{x+a_2} + a_3\sqrt{x+a_3}\right)$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii . Fiecare subiect este notat de la 0 la7.
Timp de lucru trei ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
BRĂILA

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014
CLASA A XII-A
PROFIL ŞTIINŢE ALE NATURII

1. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in N\right\}$ şi

$K=\left\{n \in N \middle| n=a^3+b^3+c^3-3abc,\ a,b,c \in N\right\}$.

   a) Arătaţi că $\forall A,B \in G$ atunci $AB \in G$.

   b) Arătaţi că $\forall m,n \in K$ atunci $m \cdot n \in K$.

2. Calculaţi $\int x \cdot ctg^2 x dx$, unde $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

3. Se consideră funcţia $f: R \to R, f(x)=\frac{1}{5^x+2}$. Determinaţi primitivele $F: R \to R$ ale funcţie f cu proprietatea că $F(0)=-\log_5 \sqrt{3}$.

4. Se consideră funcţiile $f: R \to R, f(x)=1+x+x^2+x^3+...+x^{2012}$ şi

$F: R \to R, F(x)=\int_0^x f(t)dt, \forall x \in R.$

a)Să se arate că $F'(x)=f(x), \forall x \in R.$

b)Să se arate că funcţia F este bijectivă.

Notăm cu $g: R \to R$ inversa funcţiei F şi a $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2013}$.

c) Să se calculeze $\int_0^a g(x)dx$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii . Fiecare subiect este notat de la 0 la7.
Timp de lucru trei ore.