Colegiul Naţional „Constantin Carabella” Târgovişte

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”
Ediţia a XV-a, Târgovişte, 16 Februarie 2014

CLASA A IX-A

Subiectul 1. a) Aflați numerele reale x, y astfel încât elementele mulțimii

$$M = \{x, y\} \cup \left\{\frac{31}{20}, \frac{29}{30}, \frac{27}{40}, \frac{11}{120}\right\}$$

ordonate crescător, să formeze o progresie aritmetică de șase termeni.

b) Fie numerele reale pozitive $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ în progresie geometrică. Există mulțimi A formate din șase numere reale în progresie aritmetică, astfel încât $\{b_1, b_2, b_3, b_4\} \subset A$?

Subiectul 2. a) Fie $n, k \in \mathbb{N}, n \geq 1$ şi $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Demonstraţi că

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)\left(a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \cdots + a_n^{k+1}\right) \geq n\left(a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k\right).$$

b) Determinaţi cea mai mică valoare pe care o poate lua expresia

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_5}{x_6},$$

atunci când $x_k, 1 \leq k \leq 6$ sunt numere reale cu $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq 1000$.

Subiectul 3. Fie P un punct în interiorul unui triunghi ABC.

a) Demonstraţi că există puncte I, J pe laturile triunghiului ABC astfel încât

$$\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{PJ} = \vec{0}.$$

b) Demonstraţi că există puncte X, Y, Z pe laturile triunghiului ABC astfel încât

$$\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY} + \overrightarrow{PZ} = \vec{0}.$$

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”
Ediţia a XV-a, Târgovişte, 16 Februarie 2014

CLASA A X-A

Subiectul 1. a) Fie a, b, n numere naturale, $a > b \geq 3$, $n \geq 1$, astfel încât b^n divide $a^n - 1$. Demonstraţi că $a^b > 2^n$.

b) Există $m \in (0, \infty)$ pentru care are loc egalitatea de mulțimi:

$$\left\{x \in (0,\infty) \mid 2^x + 2^{\frac{1}{x}} \leq 4\right\} = \left\{x \in (0,\infty) \mid \log_8\left(1 + 3\sqrt{x}\right) = \log_{27}(mx)\right\}?$$

Subiectul 2. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ şi

$$|a| = 3\sqrt{3}, \quad |a - b| = 2\sqrt{3}, \quad |a + b + c| = 21.$$

Calculaţi $|b|^2 + |c|^2$.

Subiectul 3. Fie $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funcții care satisfac relația următoare, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$:

$$f\big(f(n)\big) + g\big(f(n)\big) = n.$$

Demonstrați că g este funcția nulă pe $\mathbb{N}$.

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu” Ediţia a XV-a, Târgovişte, 16 Februarie 2014

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Pentru un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale mai mari sau egale cu 1, definim

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k}, \quad y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}, \quad z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[a_k]}.$$

a) Demonstraţi că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) Demonstraţi că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Subiectul 2. Fie $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ o funcție care satisface următoarea relație:

$$\sqrt{x^2-x+1} \leq f(x)e^{f(x)} \leq \sqrt{x^2+x+1},$$

oricare ar fi $x > 0$. Demonstrați că:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,; \qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{f(x)}} = \frac{1}{e}.$$

Subiectul 3. Fie date $P, Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Presupunem că $U, V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sunt două soluții ale ecuației

$$X^2 - PX + Q = 0_2$$

astfel încât matricea $U - V$ este inversabilă. Demonstrați că:

$$\operatorname{tr}(U+V) = \operatorname{tr} P \quad \text{și} \quad \det(UV) = \det Q.$$

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

Colegiul Naţional „Constantin Carabella" Târgovişte

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Concursul de Matematică "Cezar Ivănescu"
Ediţia a XV-a, Târgovişte, 16 Februarie 2014

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie G un grup finit cu n elemente şi S o submulţime nevidă a lui G. Pentru orice număr natural $j \geq 1$, definim mulţimea

$$S^j = \{s_1 s_2 \dots s_j \mid s_1 \in S, s_2 \in S, \dots, s_j \in S\}.$$

Demonstraţi că:

a) Există $i \geq 1$, de la care avem $\operatorname{card} S^i = \operatorname{card} S^{i+1} = \operatorname{card} S^{i+2} = \cdots$.

b) S^n este subgrup al lui G.

Subiectul 2. a) Daţi exemplu de o funcţie $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ care admite o primitivă $F: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ astfel încât F^e să fie o primitivă a lui f^e.

b) Demonstraţi că nu există funcţii $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile care să admită o primitivă $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât e^G să fie o primitivă a lui e^g.

Subiectul 3. Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care există funcţii continue, neconstante $u: [0,1] \to \mathbb{R}$, satisfăcând următoarea relaţie, oricare ar fi $x \in [0,1]$:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 (x - 3y) u(y)\, dy.$$

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici