CLASA A IX-A

SUBIECTUL 1. Oficiu **1**

a) $\frac{11}{120} < \frac{27}{40} < \frac{29}{30} < \frac{31}{20}$ **1**

$\frac{31}{20} - \frac{29}{30} = \frac{7}{12}, \frac{29}{30} - \frac{27}{40} = \frac{7}{24}, \frac{27}{40} - \frac{11}{120} = \frac{7}{12}$ **1**

$x = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{120} + \frac{27}{40}\right) = \frac{23}{60}$ **1**

$y = \frac{1}{2}\left(\frac{29}{30} + \frac{31}{20}\right) = \frac{151}{120}$ **1**

b) $b_4 - b_3 > b_3 - b_2 > b_2 - b_1$ **2**

Al cincilea element trebuie ales între b_3 şi b_4 **1**

Al şaselea element trebuie ales între b_2 şi b_3 **1**

Finalizare cu raspunsul: NU **1**

SUBIECTUL 2. Oficiu **1**

a) Prin inducţie după $k \geq 0$. Verificare $k = 0$ **1**

$(***)$ $\left(\sum_i a_i^k\right)\left(\sum_i a_i^{k+2}\right) \geq \left(\sum_i a_i^k\right)^2$ (justificare CBS) **1**

Înmulţeşte inegalitatea pentru k (aşa cum este în enunţ) cu $(***)$ **1**

Finalizare **1**

b) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_5}{x_6} \geq \frac{1}{x_2} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_5}{x_6}$ **1**

$\geq \frac{1}{x_2} + \frac{x_2}{x_4} + \frac{x_4}{x_6}$ **1**

$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_4} \cdot \frac{x_4}{x_6}}$ **1**

$= 3\sqrt[3]{\frac{1}{x_6}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{3}{10}$ **1**

$x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 10$, $x_4 = x_5 = 100$, $x_6 = 1000$ **1**

SUBIECTUL 3. Oficiu **1**

a) Fie A' simetricul lui A faţă de P şi $AMA'N$ paralelogram,
unde $M \in (AB$, $N \in (AC$ **1**

Dacă $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, atunci I, J sunt M, N **1**

M şi N nu pot fi simultan în afara laturilor (AB), (AC) **1**

Dacă $N \in (AC)$ şi $M \in (AB \setminus (AB)$,
atunci putem alege $\{I\} = A'N \cap (BC)$, apoi $\{J\} = PI \cap (AB)$ **1**

b) Fie $(DD') \subset \text{Int}\, ABC$, astfel încât D este pe o latură a triunghiului,
$(DD') \ni P$ şi $PD = 2PD'$ **2**

Conform a), pentru D' există I, J cu $\overrightarrow{D'I} + \overrightarrow{D'J} = \overrightarrow{0}$ **2**

$\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{PJ} = \overrightarrow{0}$ **1**

CLASA A X-A

SUBIECTUL 1. Oficiu ______ **1**
a) $a^n - 1 = kb^n \Rightarrow a^b = (1 + kb^n)^{b/n}$ ______ **1**
$\geq 1 + kb^n \cdot \frac{b}{n} = 1 + \frac{kb^{n+1}}{n}$ ______ **1**
$\geq 1 + \frac{3^{n+1}}{n}$ ______ **1**
$> 2^n$ (cu dem prin inductie) ______ **1**

b) $2^x + 2^{1/x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{1/x}} \geq 4$ ______ **1**
$A = \{1\} \Rightarrow m = 9$ ______ **1**
Rezolvă ecuaţia $\log_8 (1 + 3\sqrt{x}) = \log_{27} (9x)$ si arată că într-adevăr
$B = \{1\}$, adică B nu mai are alte elemente.
$3\sqrt{x} = y$, $\log_8 (1 + y) = \log_{27} y^2 = t$ ______ **1**
$y = 8^t - 1 = \left(\sqrt{27}\right)^t$ ______ **1**
$\left(\frac{1}{8}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{27}}{8}\right)^t = 1 \Rightarrow t = \log_8 4 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 1$ ______ **1**

SUBIECTUL 2. Oficiu ______ **1**
a, b, c sunt vârfurile unui triunghi echilateral în planul complex ______ **2**
cu demonstraţie ______ **1**
$|a - b| = |b - c| = |c - a|$ ______ **2**
$3\left(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2\right) = |a - b|^2 + |b - c|^2 + |c - a|^2 + |a + b + c|^2$
(cu argument) ______ **2**
$|b|^2 + |c|^2 = 132$ ______ **2**

SUBIECTUL 3. Oficiu ______ **1**
f este injectivă ______ **2**
$f \circ f$ este injectivă ______ **1**
şi $(f \circ f)(n) \leq n$, ______ **1**
deci $(f \circ f)(n) = n$ ______ **2**
De aici f este bijectivă ______ **2**
$g(f(n)) = 0 \Rightarrow g \equiv 0$ ______ **1**

CLASA A XI-A

SUBIECTUL 1. Oficiu ——— **1**

a) y_n conv $\Rightarrow x_n$ conv $(x_n < y_n)$ ——— **2**

x_n conv $\Rightarrow y_n$ conv $\left(\frac{1}{a_k} \leq 2 \cdot \frac{1}{1+a_k}\right)$ ——— **2**

b) z_n conv $\Rightarrow y_n$ conv $(y_n \leq z_n)$ ——— **2**

y_n conv $\Rightarrow z_n$ conv $\left(\frac{1}{[a_n]} \leq 2 \cdot \frac{1}{a_n}\right)$ ——— **3**

SUBIECTUL 2. Oficiu ——— **1**

a) Formulează corect: PRA că există $x_n \to \infty$ pentru care

$f(x_n) \leq M$ ($f(x_n)$ este mărginit) ——— **1**

$\sqrt{x_n^2 - x_n + 1} \leq f(x_n)\, e^{f(x_n)} \leq M e^{f(M)}$, contradicţie ——— **2**

b) $\ln \sqrt{x^2 - x + 1} \leq f(x) + \ln f(x) \leq \ln \sqrt{x^2 + x + 1}$ ——— **1**

$\frac{\ln \sqrt{x^2-x+1}}{f(x)} \leq \frac{f(x)+\ln f(x)}{f(x)} \leq \frac{\ln \sqrt{x^2+x+1}}{f(x)}$ ——— **2**

$\frac{f(x)+\ln f(x)}{f(x)} \cdot \frac{\ln x}{\ln \sqrt{x^2+x+1}} \leq \frac{\ln x}{f(x)} \leq \frac{f(x)+\ln f(x)}{f(x)} \cdot \frac{\ln x}{\ln \sqrt{x^2-x+1}}$ ——— **2**

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)+\ln f(x)}{f(x)} = \lim_{y\to\infty} \frac{y+\ln y}{y} = 1$ ——— **1**

SUBIECTUL 3. Oficiu ——— **1**

$U^2 - V^2 - P(U-V) = 0 \Rightarrow P = \left(U^2 - V^2\right)(U-V)^{-1}$ ——— **1**

Fie $W = (U-V)\,V\,(U-V)^{-1} \Rightarrow \operatorname{Tr} W = \operatorname{Tr} V$ ——— **2**

$U + W = [U(U-V) + (U-V)V](U-V)^{-1}$

$= \left(U^2 - V^2\right)(U-V)^{-1} = P$ ——— **1**

$\operatorname{Tr}(U+V) = \operatorname{Tr} U + \operatorname{Tr} V = \operatorname{Tr} U + \operatorname{Tr} W = \operatorname{Tr}(U+W) = \operatorname{Tr} P$ ——— **1**

$Q = PU - U^2 = \left(U^2 - V^2\right)(U-V)^{-1} U - U^2$ ——— **1**

$= \left[U^2 - V^2 - U(U-V)\right](U-V)^{-1} U$ ——— **1**

$= (U-V)\,V\,(U-V)^{-1} U$, deci ——— **1**

$\det Q = \det(UV)$ ——— **1**

Notă. Acest rezultat poate fi privit ca *formule de tip Viète* pentru ecuaţii matriciale de ordinul al doilea. După cum se vede din demonstraţie, concluzia rămâne adevărată pentru matrice de orice ordin ≥ 3. Concluzia nu este neapărat adevărată pentru matrice soluţii U, V cu $U - V$ singulară.

CLASA A XII-A

SUBIECTUL 1. Oficiu ___ **1**

a) Fie $a \in S$ fixat. Funcţia $f : S^j \to S^{j+1}$,

$f(x) = ax$ este injectivă, ___ **1**

deci $\operatorname{card} S^j \leq \operatorname{card} S^{j+1}$ ___ **1**

Există i astfel încât $\operatorname{card} S^i = \operatorname{card} S^{i+1}$ ___ **1**

Avem $\operatorname{card} S^i = \operatorname{card} S^{i+1} = \operatorname{card} S^{i+2} = \cdots$,

deoarece $aS^i = S^{i+1} \Rightarrow aS^iS = S^{i+1}S \Rightarrow aS^{i+1} = S^{i+2} \Rightarrow S^{i+1} = S^{i+2}$ ___ **1**

b) $S^n = S^{n+1} = S^{n+2} = \cdots$ ___ **2**

$e \in S^n$ ___ **1**

$S^n = S^{2n}$, deci S^n este parte stabilă a lui G ___ **1**

S^n finit, cu $e \in S^n$, deci $S^n \leq G$ ___ **1**

SUBIECTUL 2. Oficiu ___ **1**

a) Caută $f = e^{\lambda x}$ şi $F = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$ ___ **1**

$(F^e)' = f^e \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}\right)^e\right]' = e^{e\lambda x}$ ___ **1**

obţine $\lambda = e^{1/(e-1)}$ ___ **1**

b) $\left(e^G\right)' = e^g \Rightarrow e^G g = e^g$ ___ **1**

$G + \ln g = g$ ___ **1**

$g + \frac{g'}{g} = g'$ ___ **1**

$\frac{g'}{g} - \frac{g'}{g^2} = 1$ ___ **1**

$\frac{1}{g(x)} + \ln g(x) = x + c$ ___ **1**

Imposibil, deoarece $\frac{1}{y} + \ln y > 0$, oricare ar fi $y > 0$ ___ **1**

Notă: Concluzia b) rămâne adevărată şi atunci când ipoteza "*g derivabilă*" se înlocuieşte cu "*g admite primitive*".

SUBIECTUL 3. Oficiu ___ **1**

$u(x) = \left[\lambda \int_0^1 u(y)\, dy\right] x - 3\lambda \int_0^1 y u(y)\, dy$,

deci $u(x) = ax + b$ ___ **2**

Ecuaţia devine $ax + b = \lambda \int_0^1 (x - 3y)(ay + b)\, dy$ ___ **1**

sau $\left[a - \lambda\left(\frac{1}{2}a + b\right)\right] x + \left[b + \lambda\left(a + \frac{3}{2}b\right)\right] = 0$ ___ **2**

Trebuie ca

(S) $\begin{cases} a - \lambda\left(\frac{1}{2}a + b\right) = 0 \\ b + \lambda\left(a + \frac{3}{2}b\right) = 0 \end{cases}$ ___ **1**

Soluţii nebanale $(a, b) \neq (0, 0)$ atunci când determinantul sistemului (S) este nul, adică $\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda & -\lambda \\ \lambda & 1 + \frac{3}{2}\lambda \end{vmatrix} = 0$, de unde $\lambda = -2$ ___ **2**

Când $\lambda = -2$, $u(x) = x - 1$ este o soluţie ___ **1**