Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”
Ediţia a XV-a, Târgovişte, 16 Februarie 2014

CLASA A V-A

Subiectul 1. Aflați restul împărțirii la 5 a numărului:

$$S = 2014 + 2014^2 + \cdots + 2014^{2015} + 3.$$

Subiectul 2. Șirul de numere $51, 26, 40, 16, 37, \ldots$ este construit astfel: fiecare număr, începând cu al doilea, este suma pătratelor cifrelor numărului precedent (de exemplu după 51 urmează $5^2 + 1^2 = 26$, după 26 urmează $2^2 + 6^2 = 40$, apoi $4^2 + 0^2 = 16$, apoi $1^2 + 6^2 = 37$ și așa mai departe). Determinați al 2014-lea termen al șirului.

Subiectul 3. Aflați numerele naturale n care au proprietatea că în mulțimea

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\},$$

sunt exact 123 de numere se divid cu 2, dar nu se divid cu 4, iar exact 62 de numere se divid cu 4, dar nu se divid cu 8.

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”
Ediţia a XV-a, Târgovişte, 16 Februarie 2014

CLASA A VI-A

Subiectul 1. Se dau numerele

$$a = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{34}{35}$$

și

$$b = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{35}{36}.$$

a) Comparați numerele a și b.

b) Demonstrați că $3a < 1$.

Subiectul 2. Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ascuțitunghic ABC. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ se construiesc în exterior, triunghiurile isoscele ABD și ACE astfel ca $[AB] \equiv [AD]$ și $[AC] \equiv [AE]$, iar unghiurile $\widehat{DAB}$ și $\widehat{CAE}$ să fie suplementare. Demonstrați că $DE = 2AM$.

Subiectul 3. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

a) $(x, y) + xy = 12$, unde (x, y) este cel mai mare divizor comun al lui x și y.

b) $[x, y] + xy = 12$, unde $[x, y]$ este cel mai mic multiplu comun al lui x și y.

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”
Ediţia a XV-a, Târgovişte, 16 Februarie 2014

CLASA A VII-A

Subiectul 1. Demonstrați că

$$0{,}999999 < \frac{3}{2^2} + \frac{5}{6^2} + \frac{7}{12^2} + \cdots + \frac{2013}{1013042^2} < 1.$$

Subiectul 2. Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că nu există mulțimi nevide, disjuncte A, B astfel încât

$$A \cup B = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

și produsul elementelor lui A să fie egal cu produsul elementelor lui B.

Subiectul 3. Fie ΔABC în care $m(\hat{A}) = 90^0$, $m(\hat{B}) = 30^0$ și se consideră punctele $M \in (BC), N \in (AC)$ și $P \in (AB)$ astfel încât $BM = 2MC$ și $CN = 2NA$.

Dacă dreptele AM, BN și CP se intersectează în punctul T, demonstrați că:

a) $BN = 2AM$.

b) $(TP$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ATB}$.

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”
Ediţia a XV-a, Târgovişte, 16 Februarie 2014

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Doi jucători joacă un joc folosind două cărți, pe fiecare carte fiind înscris câte un număr natural ≥ 2. În cadrul unei partide, fiecare jucător primește câte o carte și obține un punctaj egal cu numărul înscris pe cartea sa. După un anumit număr de partide (cel puțin două), un jucător a acumulat 25 de puncte iar celălalt 26 de puncte. Care sunt numerele înscrise pe fiecare carte?

Subiectul 2. Fiecărui vârf al unui cub i se atribuie un număr de la 1 la 8 astfel încât numerele să nu se repete. Fiecărei fețe a cubului i se asociază numărul egal cu suma numerelor din vârfurile sale. Demonstrați că dacă există două fețe cu suma numerelor asociate egală cu 48, atunci există o față a cubului cu numărul asociat mai mic decât 13.

Subiectul 3. Determinați cel mai mare număr natural n pentru care există un singur număr natural k astfel încât

$$\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}.$$
