International Mathematics Contest
The "CLOCK – TOWER SCHOOL"

17^{th} Edition – 2014
Juniors I Competition

Subiectul 1. Determinaţi toate soluţiile reale pozitive ale celor 3 ecuaţii simultane

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 \\ x^2 + y^3 + z = 3 \\ x^3 + y + z^2 = 3 \end{cases}$$

AITMO

Soluţie. (D. Schwarz) Adunăm toate ecuaţiile, şi obţinem $\sum x + \sum x^2 + \sum x^3 = 9$, deci

$$9 - \sum x^2 = \sum x + \sum x^3 \geq 2\sqrt{\left(\sum x\right)\left(\sum x^3\right)} \geq 2\sum x^2$$

(prin AM-GM şi Cauchy-Schwarz), de unde $\sum x^2 \leq 3$.

Scăzând aceasta din fiecare dintre ecuaţii, şi factorizând, obţinem

$$\begin{cases} x(1-x) \geq z^2(1-z) \\ y(1-y) \geq x^2(1-x) \\ z(1-z) \geq y^2(1-y) \end{cases}$$

Deoarece evident cel puţin unul dintre x, y, z este cel mult 1, rezultă din cele de mai sus că toate sunt cel mult 1, ceea ce forţează toate să fie egale cu 1, deci $\boxed{x = y = z = 1}$. ∎

Soluţie Alternativă. (A. Eckstein) Dacă toate $x, y, z \geq 1$ atunci $x = y = z$. La fel dacă toate $x, y, z \leq 1$. În celelalte cazuri, două dintre variabile sunt de o parte a valorii 1, iar cea de a treia este de cealaltă parte a valorii 1. Putem presupune că $x, y \geq 1$, $z \leq 1$ (la fel se tratează cazul când inegalităţile sunt răsturnate). Scăzând primele două relaţii, avem $x(x-1) + y^2(y-1) + z(1-z^2) = 0$. Cum toţi termenii sunt ≥ 0 (respectiv ≤ 0 în celălalt caz), toţi termenii trebuie să fie nuli, deci ajungem la $x = y = z = 1$. ∎

Subiectul 2. Notăm cu $s(N)$ suma cifrelor numărului întreg pozitiv N, scris în baza 10. Determinaţi toate numerele întregi pozitive n pentru care $s(n!) = 9$.

(Aici $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ este *factorialul* lui n.)

AoPS

Soluţie. (D. Schwarz) Deoarece $n! \equiv s(n!) = 9 \equiv 0 \pmod 9$, avem $n \geq 6$. Pentru $n \geq 11$ avem $11 \mid n!$. Notând cu $\alpha(N)$ suma cifrelor lui N de pe poziţiile impare, şi cu $\beta(N)$ suma cifrelor lui N de pe poziţiile pare, avem $\alpha(N) + \beta(N) = s(N)$, dar avem şi modulo 11 congruenţa $N \equiv \alpha(N) - \beta(N) \pmod{11}$.

Aceasta înseamnă că trebuie

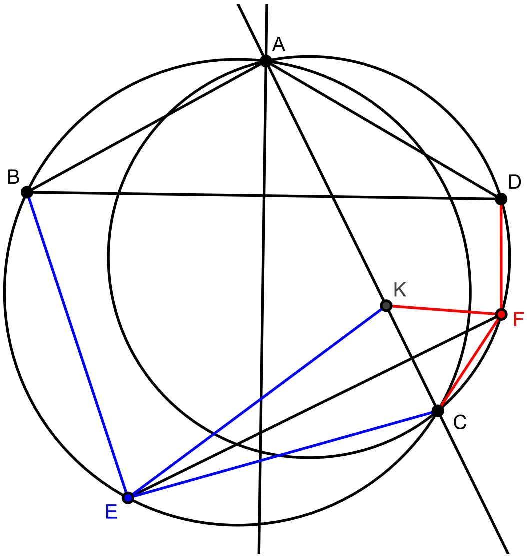
$$11 \mid \alpha(n!) - \beta(n!) = 2\alpha(n!) - s(n!) = 2\alpha(n!) - 9.$$

Dar avem $0 \leq \alpha(n!) \leq s(n!)$, deci $\alpha(n!) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, şi cerinţa de mai sus este imposibil de realizat.

Calculând cu mâna, obţinem că doar $\boxed{6! = 720,\ 7! = 5040,\ 8! = 40320}$ verifică. ∎

Subiectul 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AB = AD$. Fie E mijlocul arcului $\overset{\frown}{BC}$ al cercului $\odot(ABC)$ ce nu conţine punctul A, iar F mijlocul arcului $\overset{\frown}{CD}$ al cercului $\odot(ACD)$ ce nu conţine punctul A. Demonstraţi că $EF \perp AC$.

L. PLOSCARU



Soluţie. Fie $K \in (AC$, cu $AK = AB$. Deoarece E este mijlocul arcului $\overset{\frown}{BC}$, avem $\angle BAE = \angle KAE$, de unde $\triangle ABE \equiv \triangle AKE$. În mod similar $\triangle ADF \equiv \triangle AKF$. Astfel, $BE = KE$ şi $DF = KF$. Dar $BE = CE$ şi $CF = DF$, de unde urmează că $EC = EK$ şi $FC = FK$. Prin urmare E şi F se află pe mediatoarea segmentului $[CK]$, fapt care încheie demonstraţia. ■

Subiectul 4. Fie numerele naturale $m, n > 1$. Considerăm un tablou de dimensiuni $2m \times 2n$. Două celule se zic *vecine* dacă au o latură comună, se găsesc la capetele opuse ale unei linii, sau se găsesc la capetele opuse ale unei coloane. Astfel, fiecare celulă a tabloului are exact patru vecini. În fiecare celulă este scris unul dintre numerele $1, 2, 3$, respectând următoarele condiţii

- dacă o celulă conţine numărul 3, atunci cel puţin trei dintre vecini conţin numărul 1;
- dacă o celulă conţine numărul 2, atunci cel puţin doi dintre vecini conţin numărul 1.

Printre toate configuraţiile care satisfac aceste condiţii, care este valoarea maximă care se poate obţine însumând toate numerele din tablou?

A. ECKSTEIN & D. SCHWARZ

Soluţie. Vom arăta că răspunsul este $\boxed{8mn}$, cu modele **posibile** fiind o tablă ca de şah, alternând numerele 1 şi 3 (întotdeauna valabil), dar şi structuri "alternate" diferite (când măcar unul dintre m, n este par), ca mai jos (unde $m = 2$ şi $n = 3$)

1	3	1	3	1	3
3	1	3	1	3	1
1	3	1	3	1	3
3	1	3	1	3	1

1	3	1	3	1	3
1	3	1	3	1	3
3	1	3	1	3	1
3	1	3	1	3	1

Pentru a arăta că suma numerelor din tablou este cel mult valoarea de mai sus, vom considera oricare sub-pătrat de dimensiuni 2×2.[1]

[1]**Remarcă.** Ceea ce contează este că definiţiile de vecinătate arată că de fapt lucrăm cu o reţea pe **tor**, unde grila este izotropică (fiecare celulă se comportă ca oricare alta). Este de fapt laticea toroidală $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

Suma numerelor din el este egală cu 9 pentru tipul $T_9 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}$ (inclusiv rotaţiile şi/sau simetriile), egală cu 8 pentru tipurile $T_8 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}$ şi $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$, şi mai mică în toate celelalte posibilităţi.

Deoarece există $4mn$ astfel de pătrate P_i de dimensiuni 2×2, şi fiecare celulă aparţine la 4 dintre ele, dacă notăm cu σ suma tuturor numerelor din tablou şi cu $\sigma(P_i)$ suma numerelor din pătratul P_i, vom avea $4\sigma = \sum_{i=1}^{4mn} \sigma(P_i)$. Prin urmare dacă $\sigma(P_i) \le 8$ pentru orice P_i, va rezulta $\sigma \le 8mn$, după cum am anunţat. Să vedem dacă putem avea pătrate P_i de tip T_9? Aceasta permite asocierea a două pătrate P_j şi P_k de tip $T_7 = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}$ sau $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$, după cum se vede mai jos

	1	**3**	1	
	3	**2**	1	
	1	1		

Să remarcăm că un acelaşi pătrat de tip T_7 nu poate fi asociat cu mai mult de un pătrat de tip T_9; dar atunci $\sigma(P_i)+\sigma(P_j)+\sigma(P_k) = 9+7+7 < 3\cdot 8$, şi rezultă chiar $\sigma < 8mn$, ceea ce rezolvă complet problema noastră. ■

Soluţie Alternativă. (L. Ploscaru) Vom demonstra în general, pentru un tablou de dimensiuni $M \times N$, că suma σ a tuturor numerelor tabloului este cel mult $2MN$. Aşa cum intuiţia şi tendinţa spre simetrie ne spun, unul dintre modelele maximale pare să fie tabla de şah completată cu 1 şi 3. Într-adevăr, pentru M, N pare, răspunsul este $2MN$ (pentru modele realizând acest maxim, vezi soluţia anterioară).

Fie A_k mulţimea celulelor ce conţin numărul k, (k de la 1 la 3), iar $a_k = |A_k|$. Suma noastră va fi $\sigma = 3a_3 + 2a_2 + a_1$, iar dacă demonstrăm că $a_3 \le a_1$ problema se încheie, fiindcă atunci $\sigma = 3a_3 + 2a_2 + a_1 \le 2(a_1 + a_2 + a_3) = 2MN$. Pentru a demonstra această inegalitate, definim următoarea corespondenţă $\mathbf{3} \mapsto 1$ din A_3 în A_1, pentru fiecare $\mathbf{3} \in A_3$

- dacă vecinul din dreapta este 1, atunci $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{3} & 1 \\ \hline \end{array}$;
- dacă vecinul din dreapta este 2, atunci $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{3} & 2 \\ \hline \end{array}$ şi
  - dacă vecinul lui 2 de sub el este 1, atunci $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{3} & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$;
  - dacă nu, $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{3} & 2 \\ \hline 1 & >1 \\ \hline \end{array}$ atunci $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbf{3} & 2 & 1 \\ \hline 1 & >1 & * \\ \hline \end{array}$ (vecinul din dreapta lui 2 trebuie a fi 1);
- dacă vecinul din dreapta este 3, atunci $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{3} & 3 \\ \hline \end{array}$ şi $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{3} & 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$.

Este trivial de verificat că această corespondenţă este injectivă, deci $a_3 \le a_1$, ceea ce încheie problema.[2] ■

Fiecare problemă a fost notată de la 0 la 7 puncte.
Timpul de lucru a fost de 3 ore.

[2]De fapt, cea mai buclucaşă parte a soluţiei este construcţia corespondenţei, deoarece trebuie să fim foarte meticuloşi pentru a ne asigura injectivitatea. Problema devine mult mai grea şi completă în acest caz general. Cât despre modele, pentru cazul când MN este par, tot tabla ca de şah, cu o sumă maximă de $2MN$, este exemplul maximal, în timp ce pentru cazul când MN este impar, tabla ca de şah potrivită, cu o sumă maximă de $2MN-1$, este un exemplu maximal.