Olimpiada Naţională de Matematică
Faza Locală Dâmboviţa – 23 Februarie 2014

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Rezolvaţi în numere reale sistemul: $\begin{cases} [x] + y = 4{,}2 \\ 2x + [y] = 5{,}3 \end{cases}$.

Gazeta Matematică 2013

Subiectul 2. Demonstrați că pentru orice număr natural $n > 1$, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Gazeta Matematică 1961

Subiectul 3. Determinați o progresie aritmetică din șase termeni $t_1, t_2, \dots, t_6$ astfel ca suma pătratelor termenilor t_1, t_2, t_3, t_4 să fie egală atât cu produsul $t_1 t_2 t_3$ cât și cu produsul $t_5 t_6$.

Gazeta Matematică 1964

Subiectul 4. Fie triunghiul ABC și punctele $M \in (BC)$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $BM = MC$, $AB = m \cdot AD$ și $AC = n \cdot AE$. Notăm $\{F\} = AM \cap DE$. Demonstrați că:

a) $m \cdot \overrightarrow{DF} = n \cdot \overrightarrow{FE}$.

b) $(m+n) \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Gazeta Matematică 1976

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

Olimpiada Naţională de Matematică
Faza Locală Dâmboviţa – 23 Februarie 2014

CLASA A X-A

Subiectul 1. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$(f \circ f \circ \dots \circ f)(-x) + (f \circ f \circ \dots \circ f)(x) = 0,$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ (funcția f se compune cu ea însăși de n ori în ambii termeni).

Gazeta Matematică 1981

Subiectul 2. Rezolvați în numere întregi ecuația: $2^{x+1} = x^2 + x + 1$.

Gazeta Matematică 1987

Subiectul 3. Fie $a, b \in \mathbb{C}$ și funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definită prin $f(z) = z^2 + a|z| + b$.

i) Determinați $a, b \in \mathbb{C}$ astfel ca $f(1) = f(2) = 0$.

ii) Pentru a, b determinați la punctul anterior, aflați toate numerele complexe z cu $f(z) = 0$.

Gazeta Matematică 1980

Subiectul 4. Fie $a, b, c, d \geq 2$ numere naturale astfel încât

$$\log_a b = \frac{3}{2}, \qquad \log_c d = \frac{5}{4}$$

şi $a - c = 9$. Calculaţi $b - d$.

Gazeta Matematică 2013

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

Olimpiada Naţională de Matematică
Faza Locală Dâmboviţa – 23 Februarie 2014

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Se dă şirul:

$$a_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\ ,\ \ n = 1, 2, 3, \dots .$$

a) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, mărginit și aflați limita sa.

b) Să se afle limita șirului $b_n = a_1 a_2 \dots a_n$.

Gazeta Matematică 1965

Subiectul 2. Cum trebuie să fie numerele reale α, β, γ pentru ca raportul

$$\frac{\alpha\left(\sqrt{x}-1\right)+\beta\left(\sqrt[3]{x}-1\right)+\gamma\left(\sqrt[4]{x}-1\right)}{(x-1)^3}$$

să tindă către o limită finită și diferită de zero, când x tinde către 1 ?

Gazeta Matematică 1901

Subiectul 3. Fie matricele $B, C, X_1, X_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel ca $X_1X_2 = X_2X_1$, $\det(X_1 - X_2) \neq 0$, $X_1^2 - BX_1 + C = 0_2$ și $X_2^2 - BX_2 + C = 0_2$. Demonstrați că $X_1 + X_2 = B$ și $X_1X_2 = C$.

Gazeta Matematică 1977

Subiectul 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 2013 & 1 \\ 2014 & 1 \end{pmatrix}$.

Demonstraţi că matricea BA este inversabilă şi $BA - (BA)^{-1} = 2014 \cdot I_2$.

Gazeta Matematică 2013

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

Olimpiada Naţională de Matematică
Faza Locală Dâmboviţa – 23 Februarie 2014

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu elementul neutru e și H un subgrup propriu al lui G.

i) Dacă $a \in G \setminus H$, notăm $aH = \{ah \mid h \in H\}$. Demonstrați că $H \cap aH = \emptyset$.

ii) Dacă G e comutativ și $a \in G \setminus H$ satisface $a^2 = e$, atunci $K = H \cup aH$ este subgrup al lui G.

Gazeta Matematică 1986

Subiectul 2. Fiind dată funcția $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ cu coeficienții $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

să se arate că o primitivă a funcției $\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$, unde k este o constantă reală, este

$$F(x) = \frac{1}{2}(f(x) + a_1x + a_0) + k(f'(x) - a_2x - a_1).$$

Gazeta Matematică 1956

Subiectul 3. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Gazeta Matematică 1966

Subiectul 4. Calculaţi

$$I = \int_0^1 \left(\{2x\} - \frac{1}{2}\right)\left(\{3x\} - \frac{1}{2}\right) dx.$$

Gazeta Matematică 2013

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici