Concursul Interjudețean **ALEXANDRU MYLLER**
Ediția a XII-a, 23 ianuarie 2014
COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Clasa a V-a

1. Se consideră numărul $N = 4^{2014} \cdot 5^{4032} + 18290$.
a) Determinați primele trei cifre și ultimele trei cifre ale lui *N*.
b) Arătați că numărul *N* este divizibil cu 2, 3, 5 și 10.
c) Demonstrați că *N* nu este pătrat perfect.

2. Demonstrați că 10^n se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule, oricare ar fi numărul natural nenul n.

3. Se consideră n numere naturale consecutive astfel încât produsul tuturor resturilor nenule obținute la împărțirile celor n numere prin 5 este egal cu $3^{200} \cdot 4^{301}$. Determinați valorile posibile ale numărului n.

Subiect elaborat de Gabriela Zanoschi, Iaşi

Clasa a VI-a

1. a) Se consideră mulțimea $A = \{a, a+1, ..., a+9\}$, unde a este un număr natural oarecare. Găsiți trei submulțimi B, C, D, fiecare cu câte trei elemente, astfel încât $B \cup C \cup D = A$, $B \cap C = B \cap D = C \cap D = \varnothing$, iar suma elementelor fiecăreia dintre mulțimile B, C și D să fie aceeaşi.
b) Împărțiți mulțimea $A = \{1, 2, ..., 2013\}$ în trei submulțimi disjuncte două câte două, fiecare având acelaşi număr de elemente şi aceeaşi sumă a elementelor.

2. Un triunghi are lungimile laturilor numere naturale şi suma acestor lungimi este egală cu 10. Demonstrați că triunghiul nu este echilateral, dar este isoscel.

3. a) Găsiți 16 numere naturale astfel încât suma oricăror nouă dintre ele nu se divide cu 9.
b) Dați exemplu de opt numere de tipul $7^a \cdot 11^b \cdot 13^c$ cu proprietatea că produsul oricăror două nu este pătrat perfect.
c) Demonstrați că, din 81 de numere de tipul $7^a \cdot 11^b \cdot 13^c$, putem alege patru astfel încât produsul lor este putere a patra a unui număr natural.

Subiect elaborat de Cristian Lazăr, Iaşi

Clasa a VII-a

1. Demonstrați că nu există numere întregi distincte a, b şi c pentru care

$$\{a,b,c\}=\{a-b,b-c,c-a\}.$$

2. În interiorul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul E, astfel încât E să nu se afle pe diagonala BD. Dreapta BE intersectează dreptele AD şi CD în M, respectiv în N. Dreapta DE intersectează dreptele AB şi BC în P, respectiv în Q. Demonstrați că dreptele MP şi NQ sunt paralele.

3. Pe latura AD a pătratului $ABCD$ se consideră punctul N astfel încât $AD = 4 \cdot AN$, iar pe latura AB se consideră un punct M. Demonstrați că M este mijlocul segmentului AB dacă şi numai dacă NM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ANC$.

Subiect elaborat de Dan Popescu, Suceava

Clasa a VIII-a

1. Un şoricel vrea să mănânce un caşcaval de formă cubică, format din 1001^3 cubulețe de latură 1. După ce termină un cubuleț, poate trece doar la un altul care are o față comună cu cel abia terminat. Poate şoricelul să mănânce tot caşcavalul, astfel încât cubulețul din centru să-i rămână ultimul, ca desert?

2. Numerele reale pozitive x, y şi z au proprietatea că produsul oricăror două este cel mult egal cu 1. Demonstrați că

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2}+\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{2+y^2+z^2}+\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{2+z^2+x^2}\geq\frac{3+xy+yz+zx}{2}.$$

3. Demonstrați că, pentru orice număr natural n şi orice număr natural impar k, numărul $1+2+3+...+n$ divide $1^k+2^k+3^k+...+n^k$.

Subiect elaborat de Gabriel Ciupală şi Cătălin Ciupală, Braşov

Clasa a IX-a

1. Se consideră triunghiul ABC cu $AB > AC$. Pe segmentul AB se ia punctul N astfel încât $BN = \frac{AB + AC}{2}$. Dacă M este mijlocul laturii BC, demonstrați că MN este paralelă cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

2. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin:

$$a_0 = x \in \mathbb{R}, 3a_{n+1} = a_n^2 - 6a_n + 18, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrați că există o infinitate de valori iraționale ale lui x pentru care toți termenii şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ sunt numere naturale.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația pozitivă r şi primul termen $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Determinați partea întreagă a numărului

$$S_n = \sqrt{1 + \frac{r}{a_1 a_2}} + \sqrt{1 + \frac{r}{a_2 a_3}} + ... + \sqrt{1 + \frac{r}{a_n a_{n+1}}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Subiect elaborat de Vasile Stoica, Bacău

Clasa a X-a

1. Demonstrați că $\lg 2 > \frac{100}{333}$.

2. Afixele vârfurilor unui triunghi echilateral sunt numerele complexe a, b şi c. Considerăm numărul complex $z = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}$. Arătați că partea reală a lui z este $\frac{3}{2}$.

3. Spunem că o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este *aproape identică* dacă există o funcție $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât

$$f(f(n)) + g(f(n)) = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Dacă funcția f este aproape identică, arătați că funcția asociată g este definită prin $g(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Dați exemplu de funcție aproape identică, alta decât funcția identică.

c) Demonstrați că singura funcție aproape identică şi monotonă este funcția identică.

Subiect elaborat de Gabriel Popa, Iaşi