

(1) Din (1), pentru $y = z = \frac{1}{2}$, folosind (2), deducem că $x * \frac{1}{2} = \sqrt{x}, \forall x > 0$.	(2p)
Pentru $y = z = \frac{1}{4}$ în (1) obținem $\left(x * \frac{1}{4}\right)^2 = x * \frac{1}{2} = \sqrt{x} \Rightarrow x * \frac{1}{4} = \sqrt[4]{x} \Rightarrow 4 * \frac{1}{4} = \sqrt{2}$.	(2p)
Dacă în (1) punem $y = z = 1$, avem $x^2 = x * 2$, apoi $y = 2, z = 1$ conduce la $x^3 = x * 3$; se demonstrează imediat prin inducție că $x^n = x * n, \forall x > 0, n \in \mathbb{N}^*$, așadar rezultatul căutat este 2014^{1007} .	(3p)
(2) (1) Se consideră funcția $g : G \rightarrow G, g(x) = f(x) \cdot x^{-1}$ și se arată destul de repede că este injectivă; deoarece G este finită, avem că funcția este și surjectivă, de unde concluzia este imediată;	(3p)
2) Așadar, pentru $y \in G$ arbitrar, există $x \in G$ astfel încât $g(x) = y$, de unde $f(y) = f(f(x) \cdot x^{-1}) = x \cdot f(x^{-1}) = (f(x) \cdot x^{-1})^{-1} = y^{-1}$; ajungem astfel la $f(xy) = f(x)f(y) \Leftrightarrow (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ sau $xy = yx, \forall x, y \in G$;	(2p)
3) Dacă $x \neq e$, avem $f(x) \neq x \Rightarrow x \neq x^{-1}$ și astfel toate submulțimile de forma $\{x, x^{-1}\}$ formează o partiție a lui $G \setminus \{e\}$, ale cărei clase conțin toate câte două elemente, adică $G \setminus \{e\}$ conține un număr par de elemente, concluzia fiind imediată și aici.	(2p)
(3)a) Notăm $A = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ și considerăm $B = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$; determinăm $B - A$ și $B + A$, de unde $A = \frac{x - \ln \sin x + \cos x }{2} + C = F(x)$	(2p)
$F(0) = 0 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$	(1p)
b) derivând egalitatea dată obținem $2g(x) = g(x) + xg'(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) = xg'(x), \forall x \in \mathbb{R}$	(2p)
Deducem că, pentru $x \neq 0$, avem $\left(\frac{g(x)}{x}\right)' = 0 \Rightarrow g(x) = \begin{cases} ax, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ cx, & x > 0 \end{cases}$	(1p)
Deoarece g este continuă se ajunge la $b = 0, a = c \in \mathbb{R}$, deci $g(x) = ax, x \in \mathbb{R}$	(1p)
(4) a) Se consideră $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}$ și deoarece $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = k, \forall x > 0$; cum $f(1) = \frac{\pi}{2}$, concluzia este evidentă	(3p)
b) se folosește schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$ și imediat se obține că integral este egală cu $\frac{\pi}{2} \ln 2$	(4p)