

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

### ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014

### Clasa a XI-a

#### SUBIECTUL I

Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{pmatrix}, x \in R$

a) Arătați că  $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos^n 2x}{2} & \frac{1 - \cos^n 2x}{2} \\ \frac{1 - \cos^n 2x}{2} & \frac{1 + \cos^n 2x}{2} \end{pmatrix}$ , pentru  $n$  natural nenul.

b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \det A^k}{\det \left( \sum_{k=1}^n A^k \right)}$ .

#### SUBIECTUL II

Un determinant de ordinul al treilea cu elemente reale are elementele egale cu  $\frac{1}{2}$  pe diagonala principală, iar pe fiecare linie și coloană suma elementelor este 1.

- Să se arate că determinantul este un număr pozitiv.
- Să se găsească valoarea minimă pe care o poate lua determinantul.

#### SUBIECTUL III

Fie progresia aritmetică  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  cu rația și primul termen strict pozitive.

- Să se calculeze limita șirului  $(a_n)$ .
- Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \left( \frac{a_1}{\sqrt{a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}} \right).$$

#### SUBIECTUL IV

Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( a\sqrt{x+1} + b\sqrt{4x+1} + c\sqrt{9x+1} \right), a, b, c \in R$$

#### Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.
- Timp de lucru: 3 ore.