

Olimpiada Nationala de Matematica

Etapa locala , 16 februarie 2014, Botosani

Clasa a XII-a

Barem :

1.

➤ *f* derivabila para → *f'* impară 1p

➤ cu substitutia $t = -x$ obtinem

$$I = \int_{-a}^a \left[\frac{f(-t)}{1+e^{-t}} + f'(-t) \cdot \ln(1+e^{-t}) \right] dt =$$

$$= \int_{-a}^a \left[\frac{f(t) \cdot e^t}{1+e^t} - f'(t) \cdot \ln(1+e^t) + t \cdot f'(t) \right] dt \dots\dots\dots 3p$$

➤ $2I = I + I = \int_{-a}^a \left[\frac{f(t) \cdot (1+e^t)}{1+e^t} + t \cdot f'(t) \right] dt = \int_{-a}^a [f(t) + t \cdot f'(t)] dt = t \cdot f(t) \Big|_{-a}^a = af(a) + af(-a) = 2af(a) \rightarrow I = af(a) \dots\dots 3p$

2. Pentru $x \neq 0$, functia *f* se scrie $f(x) = \frac{1-\cos\frac{2}{x}}{2} \cdot \frac{\cos\frac{3}{x} + 3\cos\frac{1}{x}}{4} =$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(2 \cdot \cos\frac{1}{x} - \cos\frac{3}{x} - \cos\frac{5}{x} \right) \dots\dots\dots 2p$$

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} - \frac{1}{16} \cdot \begin{cases} \cos\frac{3}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} - \frac{1}{16} \cdot \begin{cases} \cos\frac{5}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ c, x = 0 \end{cases}$$

.....2p

Funcțiile de forma $g(x) = \begin{cases} \cos\frac{k}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} (k \neq 0)$ admit primitive pe \mathbb{R} ...2p

Funcția *f* admite primitive dacă și numai dacă $c=0$ 1p

3. a) $\forall x, y \in H \rightarrow (xy)^2 = xyxy = x^2y^2 = e \cdot e = e$, deci $xy \in H$ 2p

$\forall x \in H \rightarrow x^2 = e \rightarrow x^{-1} = x \in H$1p

Deci *H* subgrup al lui *G*.....1p

b) Din teorema lui Lagrange avem $ordG : ordH \rightarrow ordG = k \cdot ordH, k \in \mathbb{N}^* \dots\dots 1p$

$2ordH > ordG \rightarrow 2ordH > k \cdot ordH \rightarrow 2 > k \rightarrow k = 1 \dots\dots\dots 1p$

Deci $ordG = ordH \rightarrow G = H \dots\dots\dots 1p$

4. $(x + y)^2 - (x + y) = (x^2 - x) + (y^2 - y) + (xy + yx)$2p

$xy + yx = (x + y)^2 - (x + y) - (x^2 - x) - (y^2 - y)$1p

$(xy + yx)x = x(xy + yx)$2p

$yx^2 = x^2y$1p

$(x^2 - x)y = y(x^2 - x) \rightarrow xy = yx$ oricare $x, y \in A$1p