
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16 februarie 2014

Clasa a XII-a

1. Fie $a \in (0, \infty)$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție pară, derivabilă cu derivata continuă. Să se calculeze :

$$\int_{-a}^a \left[\frac{f(x)}{1+e^x} + f'(x) \cdot \ln(1+e^x) \right] dx .$$

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Să se determine $c \in \mathbb{R}$ astfel încât f să admită primitive pe \mathbb{R} , cu $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x} \cdot \cos^3 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$.

3. Fie (G, \cdot) un grup comutativ și $H = \{x \in G / x^2 = e\}$.
- a) Arătați că H este subgrup al lui G .
- b) Dacă G este finit și $2 \operatorname{ord} H > \operatorname{ord} G$ atunci $H = G$.

4. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea $(x^2 - x)y = y(x^2 - x)$, oricare $x, y \in A$. Demonstrați că $(A, +, \cdot)$ este un inel comutativ.

Nota:

- Timp de lucru 3 ore.
- Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.