

BAREM DE CORECTARE CLASA a VIII-a**SUBIECTUL I**

1. Dacă a, b, c sunt numere reale, calculați valoarea minimă a expresiei:

$$E = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

2. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi și $\frac{a+b+c}{3} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$, arătați că triunghiul este echilateral.

Soluție:

1. $2E = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ 1p

$(a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$ pentru orice a, b și c 1p

Valoarea minimă este 0 1p

2. $(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$ 1p

Obținerea formei $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ 2p

Finalizare 1p

SUBIECTUL II

1. Determinați valorile întregi ale lui x pentru care:

a) numărul $\sqrt{x^2 - 13}$ este rațional;

b) numărul $\sqrt{x^2 - 13x}$ este rațional;

2. Numerele reale a și b verifică egalitățile $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2014$.

Calculați $\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2}$ și $\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2}$.

Soluție:

a) $\sqrt{x^2 - 13} \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow x^2 - 13 = a^2, a \in \mathbf{Z}$, de unde $(x-a)(x+a) = 13$ 1p

Analizând toate posibilitățile se obține $x \in \{-7; 7\}$ 1p

b) $\sqrt{x^2 - 13x} \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow x^2 - 13x = a^2, a \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow 4x^2 - 4 \cdot 13x = 4a^2 \Leftrightarrow (2x - 13)^2 = 4a^2 + 169 \Leftrightarrow (2x - 13 - 2a)(2x - 13 + 2a) = 169$ 1p

Obținem $x \in \{-36; 0; 13; 49\}$ 1p

c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = \frac{2014}{ab} = 2014 \Rightarrow ab = 1$ 1p

$\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{ab}} = 2014$ 1p

$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{(ab)^2}} = a^2 + b^2 = 2014^2 - 2$ 1p

SUBIECTUL III

1. Arătați că, oricare ar fi numerele reale a, b, c , are loc inegalitatea:

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(b+1)^2 + (c+1)^2} + \sqrt{(c+1)^2 + (a+1)^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c+3).$$

Soluție:

a) Utilizăm inegalitatea $\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$ 1p

Pentru x și y pozitive inegalitatea arată că media pătratică a celor două numere este cel puțin egală cu media lor aritmetică.

Dacă $x + y$ este negativ inegalitatea este evidentă 1p

Pentru $x + y \geq 0$, prin ridicare la pătrat și efectuarea calculelor se obține forma echivalentă $(x - y)^2 \geq 0$ 1p

Aplicarea inegalității pentru fiecare termen al membrului stâng 2p

Însumarea relațiilor și finalizarea 2p

SUBIECTUL IV

$ABCDEFGH$ este prismă patrulateră regulată cu $AB = 8$ cm și $AE = 4$ cm, iar M este mijlocul muchiei (EH).

a) Demonstrați că dreapta AM este perpendiculară pe dreapta MC .

b) Aflați lungimea segmentului (FN) știind că $(ACM) \cap FG = \{N\}$.

c) Aflați tangenta unghiului dintre planele (ABD) și (ACM).

Soluție:

a) Din teorema lui Pitagora obținem: $AM = 4\sqrt{2}$, $AC = 8\sqrt{2}$ și $MC = 4\sqrt{6}$ iar din teorema reciprocă a teoremei lui Pitagora obținem că triunghiul AMC este dreptunghic în M 3p

b) Notăm $(AMC) \cap (EFH) = d$. Se obține $d \parallel AC \parallel EG$ și cum $EM \parallel GN$ rezultă $MNGE$ este paralelogram. $FN = 12$ cm 2p

c) Fie $MP \parallel EA$ și cum $EA \perp (ABD)$, se obține $MP \perp (ABD)$ și $MP = 4$ cm 1p

Dacă $PQ \perp AC$ se deduce că unghiul plan corespunzător unghiului diedru este MQP .

Tangenta unghiului dintre planele (ABD) și (ACM) are valoarea $\sqrt{2}$ 1p