OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a X-a

Barem de corectare și notare

Subiectul I

Să se determine $x, y, z \geq 0$ astfel încât:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3\sqrt{2} \\ 2^{x^2+y}+2^{y^2+z}+2^{z^2+x}=192 \end{cases}$$

Cătălin Zîrnă

Soluție $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3\sqrt{2} \Rightarrow x+y+z+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}\right)=18 \Rightarrow$

$\Rightarrow 18 \leq x+y+z+(x+y)+(x+z)+(y+z) \Rightarrow x+y+z \geq 6$ ……………………3p

$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3} \geq 2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \geq 12$ ……………………………1p

$2^{x^2+y}+2^{y^2+z}+2^{z^2+x} \geq 3\sqrt[3]{2^{x^2+y^2+z^2+x+y+z}} \geq 3\sqrt[3]{2^{18}}=3\cdot 2^6$ ………………………..2p

Avem egalitate $\Leftrightarrow$ avem egalitate în medii $\Leftrightarrow$ x =y =z = 2……………………..1p

Subiectul II

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât:

$$|z_1|=|z_2|=\left|\frac{3z_3-2z_1}{2}\right|=\left|z_3-\frac{z_2}{3}\right|$$

Arătaţi că : $\operatorname{Re}\frac{z_3}{z_1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{z_3}{z_2}$ unde $\operatorname{Re}(a+bi)=a; a,b\in\mathbf{R};\ i^2=-1$

Dorin Arventiev

Soluție Putem presupune $|z_1|=|z_2|=1$ (în caz contrar, împărţim relaţia la r = $|z_1|\neq 0$ şi renotăm $\frac{z_1}{r}=z_1$, cu $|z_1|$ = 1 etc.). Notăm $\frac{3z_3-2z_1}{2}=u \Rightarrow z_3=\frac{2u+2z_1}{3}$ ……………………………………………………………1p

Rezultă $|z_1|=|z_2|=|u|=\left|\frac{2}{3}u+\frac{2}{3}z_1-\frac{1}{3}z_2\right|=1, u\bar{u}=1, \bar{u}=\frac{1}{u}$;

$\left(\frac{2}{3}u+\frac{2}{3}z_1-\frac{1}{3}z_2\right)\left(\frac{2}{3}\frac{1}{u}+\frac{2}{3}\frac{1}{z_1}-\frac{1}{3}\frac{1}{z_2}\right)=1 \Rightarrow \frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\left(\frac{u}{z_1}+\frac{z_1}{u}\right)-\frac{2}{9}\left(\frac{u}{z_2}+\frac{z_2}{u}\right)-\frac{2}{9}\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)=1$ …3p

$\Rightarrow 2\operatorname{Re}\frac{u}{z_1}=\operatorname{Re}\frac{u+z_1}{z_2}\left(deoarece\ \overline{\left(\frac{u}{z_1}\right)}=\frac{z_1}{u}\ şi\ \frac{u}{z_1}+\frac{z_1}{u}=2\operatorname{Re}\frac{u}{z_1}\ etc.\right)$………………2p

şi, înlocuind pe u obţinem:

$$2\operatorname{Re}\frac{3z_3-2z_1}{2z_1}=\operatorname{Re}\frac{\frac{3z_3-2z_1}{2}+z_1}{z_2} \Rightarrow \left(3\operatorname{Re}\frac{z_3}{z_1}\right)-2=\operatorname{Re}\frac{3z_3}{2z_2} \text{ împărţim prin 3 } \Rightarrow$$

$\operatorname{Re}\frac{z_3}{z_1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{z_3}{z_2}$ …………………………………………………………………1p

Subiectul III

Determinaţi funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care :

$f(f(x+y)) = y + f(1-x),\ \forall x, y \in \mathbf{R}$

Gabriela Constantinescu

Soluție

Pentru y = 0 obţinem $f(f(x)) = f(1-x), \forall x \in R$ 1p

Vom arăta că f este injectivă.

Fie $a, b \in R$ a. î. f(a)= f(b) $\Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Rightarrow f(1-a) = f(1-b)$……………………..2p

Dar $f(f(b+a)) = f(f(a+b)) \Rightarrow a + f(1-b) = b + f(1-a)$………………...............………2p

Atunci rezultă a = b, deci f este injectivă...1p

Din $f(f(x)) = f(1-x), \forall x \in R$ şi f este injectivă rezultă $f(x) = 1 - x, \forall x \in R$ 1p

Subiectul IV

Rezolvaţi, în mulţimea $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ecuaţia: $4^{\sqrt{\sin x}} + 2^{\sqrt{\cos x}} = \log_2 \frac{8}{1+x^2}$

Niculae Cavachi

Soluție

$$4^{\sqrt{\sin x}} + 2^{\sqrt{\cos x}} \geq 4^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 4^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = 4^{\sin^2 x} + \frac{1}{2^{\sin^2 x}} + \frac{1}{2^{\sin^2 x}} \geq 3\sqrt[3]{4^{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{2^{\sin^2 x}} \cdot \frac{1}{2^{\sin^2 x}}} = 3$$

(1). Avem egalitate doar pentru x = 0………………….…………………………4p

$\log_2 \frac{8}{1+x^2} \leq \log_2 8 = 3$ cu egalitate pentru x = 0 (2)……………..……………2p

Din (1) şi (2) rezultă soluţia unică x = 0…………...………………………………1p