



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a XI-a

Barem de corectare și notare

Subiectul I

Fie $A, B \in M_2(\mathbf{Q})$ astfel încât $AB = BA$, $\det A = -3$ și $\det(A + \sqrt{3} \cdot B) = 0$.

Calculați $\det(A^2 + B^2 - AB)$.

Gazeta Matematică

Soluție

$$P(x) = \det(A + xB) \Rightarrow P(x) = x^2 - 3 \dots\dots\dots \mathbf{4p}$$

$$\text{Fie } \varepsilon \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}, \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 = 1 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$AB = BA \Rightarrow A^2 + B^2 - AB = (A + \varepsilon B)(A + \varepsilon^2 B) = P(\varepsilon)P(\varepsilon^2) \dots\dots \mathbf{1p}$$

$$P(\varepsilon)P(\varepsilon^2) = 13 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Subiectul II

Fie $A, B \in M_2(\mathbf{C})$. Demonstrați echivalența:

$$\det(A + B) \cdot \det(A - B) = \det(A^2 - B^2) \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = O_2.$$

Nelu Chichirim

Soluție

$$\det(A + B)\det(A - B) = \det((A + B)(A - B)) = \det(A^2 - B^2 - AB + BA)$$

$$\det(A - B)\det(A + B) = \det((A - B)(A + B)) = \det(A^2 - B^2 + AB - BA) \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

Prin adunare și folosind $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$ obținem

$$2\det(A + B)\det(A - B) = 2(\det(A^2 - B^2) + \det(AB - BA))$$

$$\text{adică } \det(A + B)\det(A - B) = \det(A^2 - B^2) + \det(AB - BA) \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

Cum $\text{Tr}(AB - BA) = 0$ și $(AB - BA)^2 - \text{Tr}(AB - BA) \cdot (AB - BA) + \det(AB - BA) \cdot I_2 = O_2$, avem

$$\det(A + B) \cdot \det(A - B) = \det(A^2 - B^2) \Leftrightarrow \det(AB - BA) = 0 \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = O_2 \dots\dots\dots \mathbf{3p}$$

Subiectul III

a) Fie $a > 0$ și șirurile $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ cu $x_n, y_n \in [0, a], \forall n \in \mathbf{N}^*$. Se știe că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = a^2$. Arătați că șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente.

b) Dacă $x_n, y_n \in (-1, 1), \forall n \in \mathbf{N}^*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 1$, rezultă că șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente?

Dorin Arventiev

Soluție

a) Din $\frac{x_n y_n}{a} \leq x_n \leq a, \forall n \geq 1 \Rightarrow x_n \rightarrow a$. Analog pentru (y_n) **4p**

b) Fie $x_n = y_n = (-1)^n + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n} - 1\right)$, evident divergente dar $x_n y_n \rightarrow 1$ **3p**



Subiectul IV

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ două șiruri de numere reale definite astfel:

$$x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{x_n}{(1+x_n)^2}, \forall n \geq 1$$

$$y_n > 0, y_{n+1} \leq \frac{y_n}{(1+y_n)^2}, \forall n \geq 1$$

- a) Arătați că șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente și determinați limitele lor.
 b) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^n = \sqrt{e}$.
 c) Arătați că șirul $(ny_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.

Cătălin Zîrnă

Soluție

a) Prin inducție, $x_n > 0, \forall n \geq 1$. Din $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \forall n \geq 1$, avem că șirul este strict descrescător. Trecând la limită,

obținem $x_n \rightarrow 0$. Analog (y_n) **3p**

b) $nx_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$. Cum $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$, strict crescător, aplicăm Lema Stolz-Cesaro $\Rightarrow nx_n \rightarrow \frac{1}{2}$

$$(1+x_n)^{x_n} \stackrel{1^\infty}{=} \left[(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \right]^{nx_n} \rightarrow e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

c) $y_n > 0, y_n \rightarrow 0 \Rightarrow (\exists) k \in \mathbf{N}$ aî $y_k \in (0, 1)$

Alegem șirul $(a_n)_{n \geq k}$ astfel: $a_k \in (y_k, 1), a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2}, \forall n \geq k$. Cu demonstrație analoagă pentru șirul

(x_n) , se arată că $a_n \rightarrow 0$ strict descrescător și $na_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Demonstrăm, prin inducție, că $y_n < a_n, \forall n \geq k$:

$$y_k < a_k \text{ este adevărată și din } y_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{y_n}{(1+y_n)^2} - \frac{a_n}{(1+a_n)^2} = \frac{(y_n - a_n)(1 - y_n a_n)}{(1+y_n)^2 (1+a_n)^2} \text{ avem că din}$$

$$y_n < a_n \Rightarrow y_{n+1} < a_{n+1}.$$

Cum $0 < ny_n < na_n, \forall n \geq k$ și (na_n) este convergent, deci mărginit, deducem că (ny_n) este mărginit.

..... **2p**