Clasa a XII-a
Barem

Subiectul I

Fie $I=\int x^{\ln x-1}\cdot\ln^3 x dx,\ x\in(0,\infty)$. Cu schimbarea de variabilă $x=e^t$ ....**2 p**

se obţine $I_1=\int\left(e^t\right)^{t-1}\cdot t^3\cdot e^t dt=\int e^{t^2}\cdot t^3 dt=\frac{1}{2}\int\left(e^{t^2}\cdot 2t\right)\cdot t^2 dt=\frac{1}{2}\int\left(e^{t^2}\right)'\cdot t^2 dt$ ....**2 p**

Integrând prin părţi, $I_1=\frac{1}{2}e^{t^2}\cdot t^2-\frac{1}{2}\int e^{t^2}\cdot 2tdt=\frac{1}{2}e^{t^2}\cdot t^2-\frac{1}{2}\int\left(e^{t^2}\right)'dt=\frac{1}{2}e^{t^2}\cdot t^2-\frac{1}{2}e^{t^2}+\zeta$.**2 p**

Rezultă $I=\frac{1}{2}e^{\ln^2 x}\cdot\ln^2 x-\frac{1}{2}e^{\ln^2 x}+\zeta=\frac{1}{2}x^{\ln x}\cdot\ln^2 x-\frac{1}{2}x^{\ln x}+\zeta,\ x\in(0,\infty)$.............................**1p**

Subiectul II

Deoarece F este primitiva lui f, $f(x)=F'(x)=\frac{f(x)+xf'(x)}{2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

Rezultă că $2f(x)=f(x)+xf'(x)$, de unde $f(x)-xf'(x)=0$, $\forall x\in\mathbf{R}$...................... **2 p**

Dacă $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=0$, adică $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0\ \forall x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$. ....**2 p**

Rezultă că există $c_1,c_2\in\mathbf{R}$, astfel încât $\frac{f(x)}{x}=c_1,\forall x<0$ şi $\frac{f(x)}{x}=c_2,\forall x>0$.

Atunci $f(x)=\begin{cases}c_1x, & x<0\\ a, & x=0\\ c_2x, & x>0\end{cases}$ ....**2 p**

Din condiţiile ca f să fie continuă şi derivabilă pe **R**, rezultă $c_1=c_2=c\in\mathbf{R}$ şi $a=0$.
Atunci $f(x)=cx$, $\forall x\in\mathbf{R}$ ....**1 p**

Subiectul III

$f,g:G\to G$, f, g morfisme, rezultă $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$, $g(xy)=g(x)\cdot g(y)$ $\forall x,y\in G$, de unde $(xy)^3=x^3y^3$, $(xy)^6=x^6y^6$, $\forall x,y\in G$.

$(xy)^6=\left[(xy)^3\right]^2=\left(x^3y^3\right)^2$, rezultă $x^6y^6=x^3y^3x^3y^3$, $\forall x,y\in G$ de unde $x^3y^3=y^3x^3$, $\forall x,y\in G$ (1).
....**2p**

Pe de altă parte, $x^6y^6=x^3x^3y^3y^3=x^3y^3x^3y^3=y^3x^3y^3x^3=y^3y^3x^3x^3=y^6x^6$. Rezultă de aici că $x^6y^6=y^6x^6\ \forall x,y\in G$ (2). **2p**

Să presupunem acum că f este o aplicaţie surjectivă. Atunci, pentru orice $a,b\in G$, există $x,y\in G$, astfel încât $a=x^3$ şi $b=y^3$. Folosind relaţia (1), se obţine că $ab=x^3y^3=y^3x^3=ba$, de unde rezultă că $(G,\cdot)$ este grup abelian..**2p**

Analog, dacă g este surjectivă, folosind relaţia (2), se arată că $(G,\cdot)$ este grup abelian.............**1p**

Subiectul IV

Notăm cu *a, b, c* cele 3 elemente de ordin 2 ale grupului şi cu e elementul neutru.
Distingem 2 cazuri: $ab=ba$ şi $ab\neq ba$.

I) $ab=ba\Rightarrow$ ordinul lui *ab* este 2………………………**1p**
deci H={*e, a, b, ab*} este un subgrup al lui G …..……...…**1p**

izomorf cu grupul lui Klein…………..…………………….....**1p**

II) $ab \neq ba \Rightarrow aba$ nu aparţine mulţimii $\{e, a, b\}$ şi ordinul lui *aba* este $2 \Rightarrow aba=c$ …….**1p**
Analog *bab*=*c*, deci *aba*=*bab*…………………………………….………………………..**1p**
de unde printr-un calcul simplu deducem că ordinul lui ab este 3 …....…………………….**1p**
Considerand multimea H=$\{e,\ a,\ b,\ aba,\ ab,\ (ab)^2\}$ şi ţinând cont de proprietăţiile lui *a* şi *b* ($a^2 = b^2 = e$ şi *aba*=*bab*) deduce că H este un subgrup a lui G izomorf cu S_3.
$S_3 = \{e, \sigma, \tau, \sigma\tau\sigma, \sigma\tau, (\sigma\tau)^2\}$ unde *e* este permutarea identică, σ este transpoziţia (1,2) şi τ este transpoziţia (2,3)...**1p**