OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a V-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul I

Determinaţi cifrele distincte *a*, *b* şi *c*, ştiind că numărul

$n=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}+a+b+c$ este pătrat perfect.

Soluție

$n=111\cdot a+111\cdot b+111\cdot c+a+b+c=112a+112b+112c$ .... *2 p*

$n=4^2\cdot 7\cdot(a+b+c)=p^2, p\in N \Rightarrow (a+b+c)\vdots 7$ .... *1 p*

I. $a+b+c=7$ şi $a\neq b\neq c\neq 0 \Rightarrow (a;b;c)\in\{(1;2;4),(1;4;2),(2;1;4),(2;4;1),(4;1;2),(4;2;1)\}$ .... *3 p*

II. $a+b+c\in M_7$, $7<a+b+c=7q^2\leq 24\Rightarrow n$ nu poate fi pătrat perfect .... *1 p*

Subiectul II

a) Demonstraţi că $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{2015}=2^{2016}-1$

b) Demonstraţi că numărul natural $a=14+2^{2016}$ este multiplu al numărului 15 .

(GM 9/2013-prelucrare)

Soluţie

a) $S=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{2015}=1+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{2015}-1=2+2+2^2+2^3+\ldots+2^{2015}-1=$
$=\ldots$ sau aplică formula sumei termenilor unei progresii geometrice .... *1 p*

Finalizare, $S=2^{2016}-1$ .... *1 p*

b) $a=15+2^{2016}-1=15+\left(1+2+2^2+\ldots+2^{2015}\right)$ .... *1 p*

$15/15\Rightarrow$ demonstrăm că $S=1+2+2^2+\ldots+2^{2015}\vdots 15$ .... *1 p*

Observă $1+2+2^2+2^3=15$ şi $S=\left(1+2+2^2+2^3\right)+\left(2^4+2^5+2^6+2^7\right)+\ldots+$
$+\left(2^{2012}+2^{2013}+2^{2014}+2^{2015}\right)$, grupare posibilă *S* având $2016=4\cdot 504$ termeni .... *1 p*

Finalizare : $S=15\cdot\underbrace{\left(1+2^4+2^8+\ldots+2^{2012}\right)}_{b}=15\cdot b\Rightarrow a=15\cdot(1+b)\vdots 15$ .... *2 p*

Subiectul III

a) Aflați restul împărțirii numărului $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2015+4051$ la numărul $b=4\cdot\left(5^3+3\cdot 5^3\right)+3^2+5$.

b) Dacă împărțim numărul natural n la 8, obținem restul 6, iar dacă îl împărțim la 10, obținem restul 4. Calculați restul împărțirii lui n la 40.

Soluție

a) $b=2014$ 1p

$a=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2014\cdot 2015+2014\cdot 2+23$ 2p

$a=2014\ (1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2013\cdot 2015+2)+23\Rightarrow$ restul $=23$ 1p

b) $n=8\cdot c_1+6$ şi $n=10\cdot c_2+4$ 1p

$5n=40\cdot c_1+30$, $4n=40\cdot c_2+16\Rightarrow 5n-4n=40\cdot(c_1-c_2)+14$ 1p

$n=40\cdot c\ +14$, $14<40\Rightarrow r=14$ 1p

Subiectul IV

Determinaţi toate perechile de numere naturale $\overline{ab}$ şi $\overline{xyz}$, cu $x<y<z$, astfel încât

$$\overline{ab}\cdot(x^2+y^2+z^2)=1\cdot 2\cdot 19\cdot 53.$$

Soluție

$\overline{ab}\in\{19,38,53\}$ 1p

1⁰. $\overline{ab}=19\Rightarrow x^2+y^2+z^2=106\Rightarrow 3^2+4^2+9^2=106$, scriere unică, deci $\overline{xyz}=349$ 2p

2⁰. $\overline{ab}=38\Rightarrow x^2+y^2+z^2=53\Rightarrow 1^2+4^2+6^2=53$, scriere unică, deci $\overline{xyz}=146$ 2p

3⁰. $\overline{ab}=53\Rightarrow x^2+y^2+z^2=38\Rightarrow 2^2+3^2+5^2=38$, scriere unică, deci $\overline{xyz}=235$.

Aşadar perechile $\left(\overline{ab};\overline{xyz}\right)$ sunt : (19 ; 349), (38 ; 146), (53 ; 235) .... 2 p