OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a VI-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul I

a) Arătați că numărul $N = 2^{111} + 3^{222} + 4^{333} + \ldots + 9^{888}$ se divide cu 5.

b) Să se determine numerele naturale a şi b ştiind că: $\frac{a^2 + a}{2} + b = \frac{b+3}{b+1}$

Soluție

a) $u(2^{111}); u(3^{222}); \ldots u(9^{888})$......................................2p

$u(N) = 0$ 1p

$N \vdots 5$ 1p

b) $\frac{a(a+1)}{2} \in N$ 0,5p

$\frac{a(a+1)}{2} + b \in N$ 0,5p

$\frac{b+3}{b+1} \in N$ 0,5p

$1 + \frac{2}{b+1} \in N$ 0,5p

b+1=1 $\Rightarrow$b=0 ; b+1=2$\Rightarrow$b=1......................0,5p

b = 0$\Rightarrow$a=2; b=1 $\Rightarrow$a=1...............................0,5p

Subiectul II

a) Scrieți numărul $a = 7^{2014} - 7^{2013} + 7^{2012} - 7^{2011}$ ca sumă de trei pătrate perfecte.

b) Determinați numerele prime p pentru care $p + 2, p^2 + 4, p^3 + 2$ şi $p^4 - 2$ sunt simultan numere prime.

Soluție

a) $a = 7^{2011}(7^3 - 7^2 + 7 - 1)$…………………………….…1p

$a = 7^{2011} \cdot 300$……………………………………….………..1p

$a = 7^{2010} \cdot 100 \cdot 7 \cdot 3$……………………...…………………1p

$7 \cdot 3 = 21 = 1 + 2^2 + 4^2$……………………..……………….0,5p

$a = 7^{2010} \cdot 10^2 \cdot (1 + 2^2 + 4^2) = 7^{2010} \cdot 10^2 + 7^{2010} \cdot 2^2 \cdot 10^2 + 7^{2010} \cdot 4^2 \cdot 10^2 =$

$(7^{1005} \cdot 10)^2 + (7^{1005} \cdot 10 \cdot 2)^2 + (7^{1005} \cdot 10 \cdot 4)^2$ ……….……….0,5p

b) p = 2 $\Rightarrow$ p + 2 = 4 (F), p = 3 $\Rightarrow$ 5, 13, 29, 79 (A)……… ….1p

p = 5$\Rightarrow$ $p^4 - 2 = 623$ (F), p = 5k+1 $\Rightarrow p^4 + 4 \vdots 5$ (F), p = 5k+2 $\Rightarrow p^3 + 2 \vdots 5$ (F), p = 5k+3 $\Rightarrow p + 2 \vdots 5$ (F),

p = 5k+4 $\Rightarrow p^2 + 4 \vdots 5$ (F). Finalizare p = 3……………………..……2p

Subiectul III

Unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle AOC$ sunt suplementare, iar bisectoarele lor (OM respectiv (ON formează un unghi cu măsura egală cu 60^0. Calculaţi măsurile celor două unghiuri.

Soluție

Dacă (OB şi (OC ar fi situate de o parte şi de alta a laturii (OA, atunci m($\sphericalangle BOC$) = 180^0, deci m($\sphericalangle MON$) = 90^0, contradicţie cu enunţul (1) ; fie ($OB \subset$ Int($\sphericalangle AOC$); m($\sphericalangle AOM$) = m($\sphericalangle MOB$) = $= \frac{1}{2} \cdot$ m($\sphericalangle AOB$) = x, şi m($\sphericalangle AON$) = m($\sphericalangle NOC$) = $\frac{1}{2} \cdot$ m($\sphericalangle AOC$) = y (2); din (2) şi enunţ rezultă că

$2x + 2y = 180^0 \Leftrightarrow x + y = 90^0$ (3); m($\sphericalangle MON$) = m($\sphericalangle AOC$) – m($\sphericalangle NOC$) – m($\sphericalangle AOM$) $\Rightarrow$

$2y - y - x = 60^0 \Leftrightarrow y - x = 60^0$ (4); adunând membru cu membru relaţiile (3) şi (4) obţinem $y =$ $= 75^0$, deci $x = 15^0$, m($\sphericalangle AOB$) = 30^0 şi m($\sphericalangle AOC$) = 150^0.

Barem de corectare:

- analizează (1) ………… (1p)
- scrie (2) ………………… (1p)
- deduce (3) ………………. (1p)
- deduce (4) ………………. (2p)
- finalizează ………………. (2p)

Total **7 p**

Subiectul IV

Se consideră triunghiul ABC având $[AB] \equiv [AC]$ şi $\angle B \equiv \angle C$. Fie M şi N două puncte pe dreapta BC atfel încât B între M şi C, iar C între B şi N. Știind că $[BM] \equiv [CN]$ să se demonstreze că;

a) $[AM] \equiv [AN]$;

b) $[PN] \equiv [QM]$, unde P şi Q sunt respectiv mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[AC]$;

c) $[PM] \equiv [QN]$.

Soluție

a) figura 1p

$\angle ABM \equiv \angle ACM$ 0,5p

$\Delta ABM \equiv \Delta ACM$ (LUL)......................1p

$[AM] \equiv [AN]$....................................0,5p

b) $[PB] \equiv [QC]$.................................0,5p

$[BN] \equiv [CM]$...................................0,5p

$\Delta MQC \equiv \Delta NPB$ (LUL)....................0,5p

$[PM] \equiv [QM]$..................................0,5p

c) $\Delta MBP \equiv \Delta NCQ$ 1p

$[PM] \equiv [QN]$...................................1p