OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanţa, 23.02.2014

Clasa a VII-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul I

Determinaţi cardinalul mulţimii $A=\left\{n / n\in N, 44<\sqrt{2014+\sqrt{n}}<45\right\}$

Soluţie

$n\in N\Rightarrow\sqrt{n}\in R_+\Rightarrow 2014+\sqrt{n}\geq 2014\Rightarrow\sqrt{2014+\sqrt{n}}\in R_+$ ……………..………..1p

$44<\sqrt{2014+\sqrt{n}}<45\Leftrightarrow 1936<2014+\sqrt{n}<2025\Leftrightarrow$ …………………………..1p

$\Leftrightarrow -78<\sqrt{n}<13\Leftrightarrow$ ……………………………………………………….……..1p

$\Leftrightarrow 0\leq\sqrt{n}<13\Leftrightarrow$ ……………………………………………………….…..1p

$\Leftrightarrow 0\leq n\leq 169, n\in N$ …………………………………………………………1p

$A=\{0,1,.........,168\}$ ……………………………...……………………………..1p

Card A=169 ……………………………………………………………………1p

Subiectul II

Calculaţi valorile numerelor naturale a, b şi p, unde p este număr prim, ştiind că $a^2+a=p^{2^b}+2$.

Gazeta Matematică, E:14569

Soluţie. Egalitatea din enunţ este echivalentă cu $a(a+1)=p^{2^b}+2$ (1), dar $a(a+1)$ este număr par, deci p^{2^b} este număr par şi cum p este număr prim deducem că p = 2; înlocuim în relaţia (1) şi scoatem pe 2 factor comun: $a(a+1)=2(2^{2^b-1}+1)$ (2); dacă a = 1 $\Rightarrow$ $2=2(2^{2^b-1}+1)$ $\Leftrightarrow$ $2^{2^b-1}+1=1\Leftrightarrow 2^{2^b-1}=0$ imposibil (3); numerele a şi a + 1 fiind consecutive sunt prime între ele (4); numerele 2 şi $2^{2^b-1}+1$ sunt prime între ele (5); din (3), (4) şi (5) rezultă că a = 2 rămâne singura situaţie ce este posibilă şi înlocuind în (1) obţinem $2^{2^b}+2=6$,$\Leftrightarrow$ $2^b=2^1\Leftrightarrow$ b = 1.

Barem de corectare:

- scrie (1) ………………………… (1p)
- deduce p = 2 …………………… (1p)
- analizează a = 1 şi deduce (3) ….. (1p)
- constată (4) şi (5) ……………… (2p)
- a = 2 este singura posibilitate ….. (1p)
- b = 1 …………………………… (1p)

Total **7 p**

Subiectul III

Fie un triunghi isoscel ABC în care $[AB]\equiv[AC]$ şi fie $D\in(AC)$. Construim punctul $E\in AB$ astfel încât $[CD]\equiv[BE]$ şi $B\in(AE)$. Demonstraţi că dacă $\{F\}=ED\cap BC$, atunci F este mijlocul segmentului (DE).

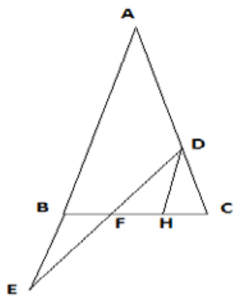
Soluţie:

Fie H punctul de intersecţie al paralelei din D la AB cu dreapta BC…………………………………………………………………….2 p

Cum $\angle ABC\equiv\angle DHC$ rezultă $\angle DHC\equiv\angle DCH$ ………………………………………….2 p

deci $[DH]\equiv[DC]\equiv[BE]$……………………………………1 p

Atunci BEHD este paralelogram şi deci $[FD]\equiv[FE]$……….2 p



Subiectul IV

Fie ABCD un trapez isoscel cu AB || CD, AB = 2·CD, AC ∩ BD ={T}, m(∢BTC) =120^0, punctul E este mijlocul segmentului BT, punctul G este centrul de greutate al triunghiului ΔDAT şi punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ΔTAB. Demonstraţi că patrulaterul TGOE este dreptunghi.

Nicolae Jurubiţă, profesor, Medgidia

Soluție. Notând cu M, F şi N mijloacele segmentelor [AD], [AT] respectiv [AB], avem: {G} = TM ∩ DF şi {O} = TN ∩ AE; trapezul ABCD este isoscel, deci ΔTAB este isoscel cu m(∢T) = 60^0 ⇒ ΔTAB este echilateral ⇒ AE ⊥ BT (1); în ΔTAB punctul O este şi centru de greutate, deci $\frac{TO}{TN}=\frac{2}{3}$ (2); în ΔTAD avem $\frac{TG}{TM}=\frac{2}{3}$ (3); din (2) şi (3) $\overset{tranz.}{\Rightarrow}$ $\frac{TO}{TN}=\frac{TG}{TM}$ $\overset{rec.t.Th.}{\Rightarrow}$ GO || MN, dar MN || DB (ca linie mijlocie în ΔABD) $\overset{tranz.}{\Rightarrow}$ GO || ET ⇒ GO ⊥ AE (4); MT este linie mijlocie în ΔDAE ⇒ MT || AE ⇒ MT ⊥ DB (5); din (1), (4) şi (5) ⇒ m(∢OET) = m(∢GOE) = m(∢GTE) = 90^0 ⇒ patrulaterul TGOE este dreptunghi, q. e. d.

Barem de corectare:

- deduce AE ⊥ BT ………………………………………….. (2p)
- deduce $\frac{TO}{TN}=\frac{2}{3}$ …………………………………………... (1p)
- deduce $\frac{TG}{TM}=\frac{2}{3}$ ………………………………………….. . (1p)
- deduce GO || ET ⇒ GO ⊥ AE ………………………………... (1p)
- deduce MT || AE ⇒ MT ⊥ DB ………………………………... (1p)
- finalizează m(∢OET) = m(∢GOE) = m(∢GTE) = 90^0 ……. (1p)

Total **7 p**