OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a XI-a

Subiectul I

Fie $A, B \in M_2(\mathbf{Q})$ astfel încât $AB = BA$, $\det A = -3$ și $\det\left(A + \sqrt{3} \cdot B\right) = 0$.

Calculați $\det\left(A^2 + B^2 - AB\right)$.

Gazeta Matematică

Subiectul II

Fie $A, B \in M_2(\mathbf{C})$. Demonstrați echivalența:

$$\det(A+B) \cdot \det(A-B) = \det\left(A^2 - B^2\right) \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = O_2.$$

Nelu Chichirim

Subiectul III

a) Fie $a > 0$ și șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n, y_n \in [0, a]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Se știe că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = a^2$. Arătați că șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente.

b) Dacă $x_n, y_n \in (-1, 1)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$, rezultă că șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente?

Dorin Arventiev

Subiectul IV

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale definite astfel:

$$x_1 > 0,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{(1+x_n)^2}, \forall n \geq 1$$

$$y_n > 0,\ y_{n+1} \leq \frac{y_n}{(1+y_n)^2}, \forall n \geq 1$$

a) Arătați că șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente și determinați limitele lor.

b) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x_n)^n = \sqrt{e}$.

c) Arătați că șirul $(ny_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Cătălin Zîrnă

Notă:
Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu