OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a VIII-a

Subiectul I

1. a) Arătați că $\sqrt{\dfrac{7\cdot 36^n+9\cdot 6^n+2}{7\cdot 6^n+2}}\in R/Q$, oricare ar fi n∈N.

   b) Aflați numerele naturale *a* și *b* astfel încât :

$$A=\frac{6}{\sqrt{a+11-\sqrt{8a}}+\sqrt{b+12-\sqrt{12b}}}$$ să fie număr natural

Subiectul II

Demonstraţi inegalităţile

a) $\dfrac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$, oricare ar fi *x* și *y* numere reale pozitive distincte

b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{3}}+\dfrac{5}{\sqrt{4}}+...+\dfrac{1009}{\sqrt{1008}}>2014$

Subiectul III

În cubul *ABCDA'B'C'D'* punctul *M* ∈ (*DD'* astfel încât [*DD'*] ≡ [*D'M*], *MA'* ∩ (*ABC*) = {*S*} şi *MC'* ∩ (*ABC*) = {*P*}.

a) Demonstraţi că punctele *S*, *B* şi *P* sunt coliniare.

b) Dacă (*MA'B*) ∩ (*ADC'*) = *d*, calculaţi măsura unghiului dreptelor *AD'* şi *d*.

Subiectul IV

Fie *SABCD* o piramidă patrulateră regulată, *AM* ⊥ *SB*, *M* ∈ *SB*, *BN* ⊥ *SC*, *N* ∈ *SC*, *CP* ⊥ *SD*, *P* ∈ *SD*, *DQ* ⊥ *SA*, *Q* ∈ *SA* şi *R* simetricul punctului *N* faţă de dreapta *AC*.

a) Demonstraţi că punctele *B*, *R*, *Q* şi *D* sunt coplanare.

b) Calculaţi măsura unghiului dintre dreptele *MP* şi *RQ*.

Gazeta Matematică, E.14350

Notă:
Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu