OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a IX-a

Subiectul I

Fie $a \in \mathbf{R}$. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $[x]^2 + \left[x + \frac{1}{2}\right] = a + [2x]$.

GM

Subiectul II

a) Fie $a \geq b \geq c \geq 0$, $d \geq 0$. Să se arate că $\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c+d} \leq \sqrt{3 \cdot (a+d)}$;

b) Fie $a, b, c \in [0, \infty)$ cu proprietatea $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{3} \cdot b} + \frac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{3} \cdot c} + \frac{\sqrt{c}}{1+\sqrt{3} \cdot a} \geq \frac{1}{6}$$

Alexandru Cărnaru

Subiectul III

Fie numerele $x_1, x_2, ..., x_n \in [-1,1]$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că

$\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2} + ... + \sqrt{1-x_n^2} \leq \sqrt{n^2 - (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}$.

***

Subiectul IV

a) Fie vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ necoliniari, cu proprietatea $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ și $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{0}$, $x, y, z \in \mathbf{R}$. Să se arate că $x = y = z$.

b) Fie ABC un triunghi. Medianele AM, BN, CP taie cercul circumscris triunghiului ABC în punctele $D, E,$ respectiv F. Știind că $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{PF} = \vec{0}$, să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

GM

Notă:
Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu