



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a VIII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{a - \sqrt{bc}}{a + 2(b + c)} + \frac{b - \sqrt{ca}}{b + 2(c + a)} + \frac{c - \sqrt{ab}}{c + 2(a + b)} \geq 0.$$

Soluție. Din inegalitatea mediilor avem $\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$, deci

$$\frac{a - \sqrt{bc}}{a + 2(b + c)} \geq \frac{a - \frac{b+c}{2}}{a + 2(b + c)} = \frac{2a - b - c}{2(a + 2b + 2c)}$$

Atunci membrul stâng al inegalității din enunț este mai mare sau egal cu
 $\frac{2a - b - c}{2(a + 2b + 2c)} + \frac{2b - c - a}{2(2a + b + 2c)} + \frac{2c - a - b}{2(2a + 2b + c)} \stackrel{\text{not}}{=} S \dots\dots\dots$ **2p**

Notând $a + 2b + 2c = 5x$, $2a + b + 2c = 5y$ și $2a + 2b + c = 5z$, obținem
 $a = -3x + 2y + 2z$, $b = 2x - 3y + 2z$ și $c = 2x + 2y - 3z$. Atunci
 $\frac{2a - b - c}{2(a + 2b + 2c)} = \frac{-10x + 5y + 5z}{10x} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 2 \right) \dots\dots\dots$ **3p**

Scriind relațiile analoge și sumând avem:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) - 6 \right] \geq 0, \end{aligned}$$

ceea ce conduce la concluzia problemei $\dots\dots\dots$ **2p**

Problema 2. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub cu latura $AB = a$. Considerăm punctele $E \in (AB)$ și $F \in (BC)$ astfel încât $AE + CF = EF$.

- a) Determinați măsura unghiului format de planele $(D'DE)$ și $(D'DF)$.
 b) Calculați distanța de la D' la dreapta EF .

Soluție. a) Segmentul $[BA]$ îl prelungim cu segmentul $[AH] \equiv [FC]$.
 Atunci $\triangle DAH \equiv \triangle DCF$ (C.C.), de unde $\widehat{HDA} \equiv \widehat{FDC}$, deci $m(\widehat{HDF}) = 90^\circ$.

Apoi, $[DH] \equiv [DF]$, de unde $\triangle DHE \equiv \triangle DFE$ (L.L.L.) și de aici
 $m(\widehat{FDE}) = m(\widehat{HDE}) = 45^\circ$ **3p**

Deoarece $FD \perp DD'$ și $ED \perp DD'$, rezultă $m((D'DE), (D'DF)) = m(\widehat{FDE}) = 45^\circ$ **1p**

b) Notăm cu P proiecția punctului D pe dreapta EF . Conform teoremei celor trei perpendiculare obținem $D'P \perp EF$, deci $d(D', EF) = D'P$.. **1p**

Din congruența $\triangle DHE \equiv \triangle DFE$, obținem $DP = AD = a$ **1p**

Teorema lui Pitagora ne conduce la $D'P = a\sqrt{2}$ **1p**

Problema 3. Se consideră mulțimea $A = \{n, n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$, unde $n \geq 4$ este un număr natural. Determinați cea mai mică valoare a lui n pentru care A conține cinci elemente $a < b < c < d < e$ astfel încât

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{c}{e}.$$

Soluție. Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ astfel încât $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{c}{e} = \frac{p}{q}$. Evident $p < q$. Cum numerele a, b și c se divid cu p , iar numerele c, d și e se divid cu q , rezultă că există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $c = mpq$ **1p**

Deoarece $e - a \leq 2n - n = n$, iar n trebuie să fie minim, trebuie ca numerele a, b și c să fie multipli consecutivi ai lui p , iar c, d și e să fie multipli consecutivi ai lui q . Prin urmare, $a = mpq - 2p$ și $e = mpq + 2q$ **1p**

Deoarece $n \leq a < e \leq 2n \leq 2a$, rezultă $2a \geq e$, adică $2mpq - 4p \geq mpq + 2q$, sau $mpq \geq 4p + 2q$. (*)

Cum $\frac{c}{e} = \frac{mpq}{mpq + 2q} = \frac{p}{q}$, obținem $m(q - p) = 2$, deci $m \in \{1, 2\}$... **1p**

Dacă $m = 1$, atunci $q - p = 2$, deci $q = p + 2$. Înlocuind în (*) obținem: $(p - 2)^2 \geq 8$, de unde $p \geq 5$. Pentru $p = 5$ și $q = 7$, avem $a = 25$, $b = 30$, $c = 35$, $d = 42$, $e = 49$ și, deoarece $n \leq a < e \leq 2n$, rezultă $n = 25$ **2p**

Dacă $m = 2$, atunci $q - p = 1$, deci $q = p + 1$. Înlocuind în (*) obținem: $(p - 1)^2 \geq 2$, de unde $p \geq 3$. Pentru $p = 3$ și $q = 4$, avem $a = 18$, $b = 21$,

$c = 24, d = 28, e = 30$ și, deoarece $n \leq a < e \leq 2n$, rezultă $n \in \{16, 17, 18\}$.
 Prin urmare, $n_{\min} = 16$ **2p**

Problema 4. a) Demonstrați că suprafața unui pătrat de latură 2 nu se poate acoperi cu trei discuri de rază 1.

b) Demonstrați că folosind trei discuri de rază 1 se poate acoperi mai mult de 99,75% din suprafața unui pătrat de latură 2.

Soluție. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 2 și S_1, S_2 și S_3 trei discuri de rază 1.

a) Presupunem prin reducere la absurd că S_1, S_2 și S_3 acoperă suprafața pătratului. Deoarece latura pătratului este egală cu diametrul unui disc, este necesar ca două vârfuri alăturate ale pătratului, fie acestea A și B , să fie acoperite de un același disc S_1 , adică $[AB]$ este diametrul lui S_1 **1p**

Fie $M \in (AD)$. Cum $MC > 2$, atunci M și C sunt în discuri diferite. Putem presupune $C \in S_2$ și $(AD) \subset C_3$. Analog $D \in S_3$ și $(BC) \subset C_2$. Atunci $(BC) \subset S_2$ și $(AD) \subset S_3$.

Fie acum $P \in (BC), N \in (AD)$ astfel încât $CP = DN = 1,8$. Fie Q mijlocul lui $[CD]$. Atunci $PQ > 2$, deci $Q \notin S_2$. Analog $QN > 2$, deci $Q \notin S_3$. Cum, evident $Q \notin S_1$, obținem o contradicție **3p**

b) Fie $M \in (AC)$ astfel încât $AM = 2$. Notăm cu P și R proiecțiile lui M pe AB și AD . Fie $T \in BC$ astfel încât ca $PT = 2$ și $U \in DC$ astfel ca $RU = 2$. Considerăm discurile de diametre AM, PT și RU . Suprafața neacoperită de acestea este inclusă în interiorul pătratului format cu punctele C, U, X și T unde $X \in (MC)$.

Este suficient să arătăm că $\mathcal{A}_{CUXT} < 0,25\% \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$, ceea ce este echivalent cu $CT < \frac{1}{20}BC = 0,1$ sau $BT > 1,9$.

$$\text{Avem } AP = \sqrt{2}, BP = 2 - \sqrt{2}, BT^2 = 4 - (2 - \sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2} - 2.$$

Relația de demonstrat $BT > 1,9$ revine la $4\sqrt{2} - 2 > 1,9^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{2} > 5,61 \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1,4025$, ceea ce este adevărat **3p**