Societatea de Ştiinţe
Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a XI-a

Problema 1. Dacă n este un număr natural, iterata de ordin n a unei funcţii $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţia

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n},$$

unde f^0 este identitatea. Determinaţi funcţiile continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc simultan următoarele două condiţii:

(a) Funcţia $f^0 + f^1$ este crescătoare; şi

(b) Există un număr natural nenul m, astfel încât funcţia $f^0 + \cdots + f^m$ este descrescătoare.

Problema 2. Determinaţi funcţiile derivabile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţia $f \circ f = f$.

Problema 3. Fie n un număr natural nenul şi A, B două matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătaţi că:

(a) Matricea $AB - BA$ este singulară; şi

(b) Dacă rangul matricei $A - B$ este 1, atunci matricele A şi B comută.

Problema 4. Fie A o matrice inversabilă din $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^* \neq 0$, unde A^* este adjuncta matricei A. Arătaţi că matricea $A^2 + I_4$ este singulară dacă şi numai dacă există o matrice nenulă B în $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât $AB = -BA$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.