Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

SIBIU 2014

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Pentru fiecare $a \in A$ definim funcţiile $s_a : A \to A$ şi $d_a : A \to A$ prin $s_a(x) = ax$, $d_a(x) = xa$, oricare ar fi $x \in A$.

a) Să se arate că, dacă A este mulţime finită, atunci s_a este injectivă dacă şi numai dacă d_a este injectivă.

b) Daţi exemplu de inel care conţine un element a pentru care exact una dintre funcţiile s_a şi d_a este injectivă.

Problema 2. Fie I, J două intervale, fie $\varphi : J \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă care nu se anulează în niciun punct din J şi fie $f, g : I \to J$ două funcţii derivabile astfel încât $f' = \varphi \circ f$ şi $g' = \varphi \circ g$.

Să se arate că, dacă există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) = g(x_0)$, atunci funcţiile f şi g coincid.

Problema 3. Fie $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ o funcţie continuă, având proprietăţile:

(i) funcţia $g : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ dată de $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ are limită la $+\infty$;

(ii) funcţia $h : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ dată de $h(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ are limită finită la $+\infty$.

a) Să se arate că $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b) Să se arate că $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_1^x f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Problema 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru notat e. Presupunem că există $a \in G\backslash\{e\}$ şi un număr natural prim p cu proprietatea $x^{p+1} = a^{-1}xa$, oricare ar fi $x \in G$.

a) Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\mathrm{ord}(G) = p^k$.

b) Să se arate că mulţimea $\{x \in G \mid x^p = e\}$ este un subgrup H al lui G şi $(\mathrm{ord}(H))^2 > \mathrm{ord}(G)$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.