

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. Două autovehicule A și B pornesc simultan din același punct M și se deplasează pe aceeași direcție și în același sens cu vitezele constante v_1 și v_2 ($v_1 < v_2$), descriind un drum rectiliniu d. Fie P un punct care nu aparține dreptei d, astfel încât $PM = a$ și $m(\sphericalangle PMA) > 90^\circ$. După cât timp de la pornire unghiul $\sphericalangle APB$, sub care se văd autovehiculele din punctul P, este maxim?

Soluție.

Fie $PO \perp d$; notăm $PO = h$, $OM = b$, $m(\sphericalangle OPA) = \alpha$, $m(\sphericalangle OPB) = \beta$ și $m(\sphericalangle APB) = \gamma$. Observăm că $h^2 + b^2 = a^2$. După timpul t de la pornire, $MA = v_1 t$ și $MB = v_2 t$ 1p

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} \dots\dots\dots 1p$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b + v_2 t}{h}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{b + v_1 t}{h} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Înlocuind, obținem } \operatorname{tg} \gamma = \frac{h(v_2 - v_1)}{\frac{a^2}{t} + v_1 v_2 t + b(v_1 + v_2)} \dots\dots\dots 2p$$

Unghiul γ este maxim dacă numitorul este minim, deci când $\frac{a^2}{t} + v_1 v_2 t$ este minim ($b(v_1 + v_2)$ este constant) 1p

Folosind inegalitatea mediilor, deducem că $\frac{\frac{a^2}{t} + v_1 v_2 t}{2} \geq \sqrt{\frac{a^2}{t} \cdot v_1 v_2 t}$. Astfel, valoarea minimă se

$$\text{obține când } \frac{a^2}{t} = v_1 v_2 t, \text{ deci pentru } t = \frac{a}{\sqrt{v_1 v_2}} \dots\dots\dots 1p$$

2. Calculați suma $S = \left[\frac{1^2}{2} \right] + 2^1 \cdot \left[\frac{2^2}{3} \right] + 2^2 \cdot \left[\frac{3^2}{4} \right] + \dots + 2^{2013} \cdot \left[\frac{2014^2}{2015} \right]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

Soluție.

$$\left[\frac{n^2}{n+1} \right] = \left[\frac{n^2 - 1 + 1}{n+1} \right] = \left[n - 1 + \frac{1}{n+1} \right] = n - 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$S = 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 + 2^3 \cdot 3 + \dots + 2^{2013} \cdot 2013 \dots\dots\dots 1p$$

$$S - \frac{S}{2} = 2^{2013} \cdot 2013 - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012}) \dots\dots\dots 2p$$

$$S = 2 \cdot \left(2^{2013} \cdot 2013 - \frac{2^{2013} - 1}{2 - 1} \right) \dots\dots\dots 1p$$

$$S = 2 \cdot (2^{2013} \cdot 2012 + 1) \dots\dots\dots 1p$$

3. Determinați funcția $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, știind că $1^2 f(1) + 2^2 f(2) + \dots + n^2 f(n) = \frac{n^2 (f(n) + 1)^2}{4}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică 11/2013

Soluție.

Pentru $n = 1$ se obține că $f(1) = 1$ 1p

Dând în continuare valori lui n , intuim că $f(n) = n$ 2p

Presupunerea precedentă se demonstrează prin inducție 4p

4. Fie ΔABC și $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$, astfel încât $\frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{1}{n}$, $n > 2$,

$AA_1 \cap BB_1 = \{B'\}$, $BB_1 \cap CC_1 = \{C'\}$, $CC_1 \cap AA_1 = \{A'\}$. Aflați raportul $\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}$.

Sergiu Prisacariu

Soluție.

$$\frac{CA_1}{BC} = \frac{n-1}{n} \Rightarrow \frac{S_{\Delta AA_1 C}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{n-1}{n} \quad (1) \dots\dots\dots 2p$$

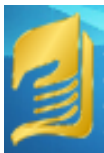
Aplicăm teorema lui Menelaus în ΔABA_1 cu punctele coliniare C_1, A', C ; rezultă că

$$\frac{C_1 A}{C_1 B} \cdot \frac{CB}{CA_1} \cdot \frac{A' A_1}{A' A} = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Obținem } \frac{A' A}{AA_1} = \frac{n}{n^2 - n + 1} \text{ și } \frac{S_{\Delta ACA'}}{S_{\Delta AA_1 C}} = \frac{n}{n^2 - n + 1} \quad (2) \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Din (1) și (2), } \frac{S_{\Delta ACA'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{n-1}{n^2 - n + 1} \text{ și analoagele } \frac{S_{\Delta CBC'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{n-1}{n^2 - n + 1}, \frac{S_{\Delta BAB'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{n-1}{n^2 - n + 1} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Finalizare: } \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1} \dots\dots\dots 1p$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

1. Se consideră numerele complexe a, b, c și d , astfel încât $a + b = c + d$ și $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
Arătați că $a^n + b^n = c^n + d^n$, oricare ar fi numărul natural n .

Soluție.

Din $(a + b)^2 = (c + d)^2$ și $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ obținem, scăzând membru cu membru, că $a \cdot b = c \cdot d$

..... 2p

Notăm $s = a + b = c + d$ și $p = a \cdot b = c \cdot d$; atunci ecuația $x^2 - sx + p = 0$ are, pe de o parte, soluțiile a și b , iar pe de altă parte, soluțiile c și d . Rezultă $a = c, b = d$ sau $a = d, b = c$

..... 4p

Astfel, $a^n + b^n = c^n + d^n, \forall n \in \mathbb{N}$ 1p

2. Determinați numerele reale x cu proprietatea că $[\log_2 x] + [\log_4 x] = 3$ (unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a).

Gazeta Matematică 1/2014

Soluție.

Impunem condiția $x \in (0, \infty)$. Dacă $x \in (0, 1)$, atunci cei doi termeni ai sumei din membrul stâng sunt negativi, deci nu există soluții în $(0, 1)$ 2p

Deci $[\log_2 x]$ și $[\log_4 x]$ sunt numere naturale și $[\log_2 x] \geq [\log_4 x]$. Avem astfel doar posibilitățile $([\log_2 x], [\log_4 x]) \in \{(2, 1); (3, 0)\}$ 3p

În primul caz, $x \in [4, 8) \cap [4, 16) = [4, 8)$. În cel de-al doilea, $x \in [8, 16) \cap [1, 4) = \emptyset$. În concluzie, numerele căutate sunt cele din intervalul $[4, 8)$ 2p

3. Se consideră numerele pozitive a, b, c și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Fie u, v, w numere reale astfel încât $0 \leq u < v < w$ și punctele $U(u, f(u)), V(v, f(v))$ și $W(w, f(w))$.
Demonstrați că $UW^2 > UV^2 + VW^2$.

Mihai Monea

Soluție.

Folosind teorema cosinusului, concluzia problemei revine la a demonstra faptul că $\sphericalangle UVW$ este obtuz 2p

Cum a, b, c sunt pozitive, parabola asociată funcției f are vârful la stânga axei Oy și f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$ 2p

Ducem prin V paralele la axele de coordonate, care vor împărți planul în patru cadrane. Punctele U și W se vor afla în cadrantul III și respectiv I, ceea ce arată că unghiul $\sphericalangle UVW$ este obtuz

..... 3p

4. Prin înfășurarea unui dreptunghi de perimetru 1 se obține suprafața laterală a unui cilindru. Determinați volumul maxim posibil al acestui cilindru și precizați dimensiunile dreptunghiului pentru care se atinge acest maxim.

Notă: Volumul unui cilindru circular drept având raza R și înălțimea H se calculează folosind formula $V = \pi R^2 H$.

Soluție.

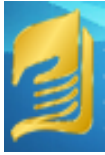
Fie a și b dimensiunile dreptunghiului, cu $a + b = \frac{1}{2}$. Dacă înălțimea cilindrului este a , raza acestuia

va fi $\frac{b}{2\pi}$, iar volumul va fi egal cu $V = \frac{1}{4\pi} ab^2$ 3p

$$\text{Din inegalitatea mediilor obținem că } V = \frac{1}{\pi} \cdot a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \leq \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}}{3} \right)^3 = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^3 = \frac{1}{216\pi}$$

..... 3p

Deducem că $V_{\max} = \frac{1}{216\pi}$, valoarea maximă atingându-se când $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{3}$ iar înfășurarea se face astfel încât înălțimea să fie de lungime a 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. Determinați asimptotele graficului funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

Soluție.

Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \infty$, funcția f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$

..... 1p

Căutăm asimptota oblică la $+\infty$.

Avem: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$; $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{e^{-y} - 1}{y} = -1$, deci

dreapta $y = x - 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la G_f 2p

Analog, dreapta $y = x - 1$ este asimptotă oblică și spre $-\infty$ la graficul lui f

..... 1p

Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x e^{-\frac{1}{x}} = 0$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^{-y}}{y} = -\infty$, dreapta $x = 0$ este asimptotă

verticală la stânga la G_f 3p

2. Fie A o matrice pătratică de ordin 3 cu elemente numere întregi. Demonstrați că matricea $3A + 5I_3$ este inversabilă.

Supliment Gazeta Matematică 9/2013

Soluție.

Determinantul matricei $3A + 5I_3$ este de forma $\Delta = \begin{vmatrix} M_3 + 2 & M_3 & M_3 \\ M_3 & M_3 + 2 & M_3 \\ M_3 & M_3 & M_3 + 2 \end{vmatrix}$

..... 4p

Efectuând calculele, obținem că $\Delta = M_3 + 2$, deci $\Delta \neq 0$. Deducem că matricea $3A + 5I_3$ este

inversabilă. 3p

3. Folosind noțiunea de limită a unei funcții într-un punct, demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ nu este funcție rațională.

Notă: O funcție se numește *rațională* dacă se poate scrie ca raport a două funcții polinomiale.

Supliment Gazeta Matematică 1/2014

Soluție.

Presupunem, prin absurd, că există P și Q polinoame cu coeficienți reali astfel încât

$$\sin x = \frac{P(x)}{Q(x)}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Observăm că limita } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ există în } \overline{\mathbb{R}},$$

..... 4p

în timp ce funcția $f(x) = \sin x$ nu are limită la $+\infty$, fiind periodică. Contradicția la care am ajuns arată că presupunerea făcută este falsă 3p

4. O echipă de hochei este formată din 6 titulari și 9 rezerve. Antrenorul poate face schimbări oricând, oricâte și poate schimba oricare jucător; un jucător schimbat poate reveni în joc după un timp. Timpul efectiv de joc este de 60 minute. Într-o anumită partidă, se constată la final că fiecare dintre cei 15 componenți ai echipei a jucat un același număr n de minute.

- a) Determinați valoarea lui n.
- b) Descrieți, folosind o matrice pătratică ce are ca elemente doar numerele 0 și 1, o modalitate în care antrenorul poate trimite în teren jucătorii astfel încât să fie respectate condițiile problemei.

Soluție.

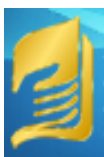
a) În fiecare moment, pe teren sunt 6 jucători. Timpul total pe care îl joacă cei aflați pe teren este deci $6 \times 60 = 360$ min. Cum fiecare joacă același număr de minute, rezultă că $n = 360 : 6 = 60$ min.

..... 4p

b) Împărțim cei 15 jucători în cinci grupe de câte 3, pe care le vom nota L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 . În matricea următoare cifra 1 arată că o anumită grupă se află pe teren în intervalul de timp corespunzător, iar cifra 0 arată că respectiva grupă este pe bancă de rezerve:

	0...12	12...24	24...36	36...48	48...60
L_1	1	1	0	0	0
L_2	1	0	1	0	0
L_3	0	1	0	1	0
L_4	0	0	1	0	1
L_5	0	0	0	1	1

..... 3p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICĂTĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. Fie $a > 0$ și funcțiile $f, g, G : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(3 + \ln x)(5 + \ln x)}$, $g(x) = \frac{1}{x(a + \ln x)}$,

$$G(x) = \ln(a + \ln x).$$

a) Arătați că G este o primitivă a lui g pe intervalul $[1, +\infty)$.

b) Determinați o primitivă F a funcției f pe intervalul $[1, \infty)$ cu proprietatea $F(e^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{7}$.

Supliment Gazeta Matematică 12/2013

Soluție.

a) $G'(x) = g(x), \forall x \in [1, \infty) \Rightarrow G$ este o primitivă a lui g 3p

b) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x(3 + \ln x)} - \frac{1}{x(5 + \ln x)} \right)$ 1p

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x(3 + \ln x)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x(5 + \ln x)} dx = \frac{1}{2} \ln(3 + \ln x) - \frac{1}{2} \ln(5 + \ln x) + \mathcal{C} =$$

$$= \ln \sqrt{\frac{3 + \ln x}{5 + \ln x}} + \mathcal{C} \dots\dots\dots 2p$$

Aflarea primitivei F cu proprietățile din enunț 1p

2. Pe \mathbb{Z} definim legea de compoziție " \circ " dată prin $x \circ y = 5xy + 5(x + y) + 4, \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Cercetați dacă legea " \circ " este asociativă.

b) Aflați ultimele 100 cifre din scrierea zecimală a numărului întreg $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ \dots \circ 2013 \circ 2014$.

Soluție.

a) Verificarea asociativității 3p

b) $x \circ y = 5(x + 1)(y + 1) - 1, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ 1p

Deducerea egalității $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = 5^{n-1}(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1) - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$
..... 2p

$1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ \dots \circ 2013 \circ 2014 = 5^{2013} \cdot 2015! - 1$ și deducem că ultimele 100 de cifre sunt toate egale cu 9

..... 1p

3. Fie grupul (\mathbb{Z}_p^*, \cdot) . Pentru un element $\hat{a} \in \mathbb{Z}_p^*$, definim funcția :

$$\psi : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^*, \Psi(\hat{x}) = \hat{a} \cdot \hat{x}, \forall \hat{x} \in \mathbb{Z}_p^*; (p \text{ număr prim}).$$

a) Arătați că ψ este bijecție.

b) Demonstrați egalitatea $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \widehat{p-1} = \Psi(\hat{1}) \cdot \Psi(\hat{2}) \cdot \dots \cdot \Psi(\widehat{p-1})$.

c) Justificați că $\hat{a}^{p-1} = \hat{1}$.

d) Argumentați că $2017 \mid \left(\sum_{i=1}^{2016} C_{2017}^i \right)$.

Soluție.

a) Suficientă verificarea injectivității: $\Psi(\hat{x}_1) = \Psi(\hat{x}_2) \Rightarrow \hat{x}_1 = \hat{x}_2$ 1p

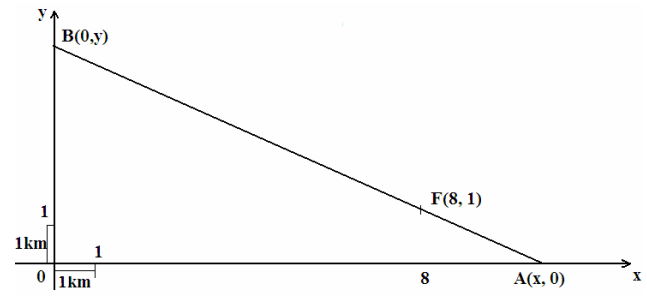
b) Deduce egalitatea cerută folosind bijectivitatea lui Ψ 2p

c) $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \widehat{p-1} = \Psi(\hat{1}) \cdot \Psi(\hat{2}) \cdot \dots \cdot \Psi(\widehat{p-1}) \Rightarrow \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \widehat{p-1} = \hat{a} \cdot \hat{1} \cdot \hat{a} \cdot \hat{2} \cdot \hat{a} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \hat{a} \cdot \widehat{p-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \widehat{p-1} = \hat{a}^{p-1} \cdot \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \widehat{p-1} \Rightarrow \hat{a}^{p-1} = \hat{1}$ 2p

d) $\sum_{i=1}^{2016} C_{2017}^i = 2^{2017} - C_{2017}^0 - C_{2017}^{2017} = 2 \cdot (2^{2016} - 1)$ 1p

Dar $2^{2016} - 1 = 2^{2017-1} - 1$; 2017 (conform punctului c) și deoarece 2017 este prim. 1p

4. O fabrică F(8, 1) se află poziționată între două șosele perpendiculare Ox și Oy, ca în desenul alăturat. Se construiește o șosea rectilinie care să unească fabrica cu cele două șosele, astfel încât aceasta să fie de cost minim, adică lungimea FA + FB = AB să fie minimă. Aflați lungimea șoselei AB de cost minim.



Soluție.

Din condiția de coliniaritate a punctelor A(x, 0); F(8, 1) și B(0, y) deducem că $y = \frac{x}{x-8}$;
 ($x > 8, y > 1$) 2p

$FA + FB = \sqrt{(x-8)^2 + 1} + \sqrt{64 + (y-1)^2}$, unde $x > 8, y > 1$ 1p

$AB = FA + FB = \sqrt{(x-8)^2 + 1} + \sqrt{64 + \left(\frac{x}{x-8} - 1\right)^2} = \frac{x}{x-8} \sqrt{(x-8)^2 + 1}$ 1p

Fie $f : (8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{x}{x-8} \sqrt{(x-8)^2 + 1}$.

Calculează $f'(x) = \frac{(x-8)^3 - 8}{\sqrt{(x-8)^2 + 1} \cdot (x-8)^2}$ 1p

Deduce că $x = 10$ este punct de minim și află coordonatele punctelor A(10, 0), B(0, 5) 1p

Lungimea drumului minim $AB = 5\sqrt{5} \approx 11,18$ km 1p