CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA LOCALĂ

Suceava, 22 februarie 2014

Clasa a-X-a - profil tehnic, profil servicii şi resurse naturale şi protecţia mediului, profil real-specializarea ştiinţele naturii

1. Fie $z_n = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n, n \in \mathbb{N}$.

a) (3p) Calculaţi z_{2014};

b) (2p) Calculaţi $\overline{z_n}$;

c) (2p) Arătaţi că $z_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Fie $S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2014}+\sqrt{2013}}$ şi

$$S_2 = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{2014\sqrt{2013}+2013\sqrt{2014}}.$$

a) (3p) Calculaţi S_1;

b) (2p) Calculaţi S_2;

c) (2p) Arătaţi că $\left[\frac{S_1}{S_2}\right] = 44$.

3. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$.

a) (4p) Arătaţi că $\lg\frac{a+b}{2} \geq \frac{\lg a + \lg b}{2}$;

b) (3p) Arătaţi că $\lg\frac{a+b}{2} \cdot \lg\frac{a+c}{2} \cdot \lg\frac{b+c}{2} \geq \lg a \cdot \lg b \cdot \lg c$.

4. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0, z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ şi $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

a) (2p) Arătaţi că $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1 z_2 + z_3 z_2 + z_1 z_3)$;

b) (2p) Arătaţi că $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = z_1 z_2 z_3 \left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right)$;

c) (3p) Arătaţi că $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primeşte un punctaj de la 0 la 7.
Timp de lucru efectiv 3 ore.