CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA LOCALĂ

Suceava, 22 februarie 2014

CLASA A XI-A

Profil tehnic, profil servicii, profil resurse naturale şi protecţia mediului, profil real-specializarea ştiinţele naturii

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
   a) (2p) Aflați matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ care satisfac egalitatea $AX = XA$.
   b) (5p) Rezolvați în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația: $X^3 = A$.

2. Determinați numerele reale *a* și *b* știind că matricele $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ satisfac simultan relațiile: $X \cdot Y = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}$ și $Y \cdot X = \begin{pmatrix} a & 16 \\ 19 & b \end{pmatrix}$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{ax^2 + bx + 5}}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați parametrii *a* și *b,* astfel încât graficul funcției să admită ca asimptotă orizontală spre $-\infty$ dreapta de ecuație $y = 1$.

4. Într-un sistem cartezian de coordinate xOy considerăm punctele $A(0,6)$, $B(5,4)$, $C(3,2)$ și $D(1,2)$. Să se determine un punct M de pe segmental [AB] pentru care aria triunghiului MAD să fie egală cu aria triunghiului MBC.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primeşte un punctaj de la 0 la 7.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

Suceava, 22 februarie 2014

CLASA A XII-A

Profil tehnic, profil servicii, profil resurse naturale şi protecţia mediului, profil real-specializarea ştiinţele naturii

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{e^x}$.
   a) (2p) Calculați derivata funcției $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$;
   b) (2p) Calculați $\int h(x)\,dx$;
   c) (3p) Calculați $\int \dfrac{2x^2+2x-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx$.

2. Pentru două numere reale a și b definim: $\max(a,b)=\begin{cases} a, \text{ dacă } a\ge b \\ b, \text{ dacă } b>a \end{cases}$. Considerăm funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max\left(x,\dfrac{2}{x+1}\right)$. Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$ și determinați primitiva F al cărei grafic conține punctul $A(0,1)$.

3. Fie $G=(0,1)$ și $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$, $\forall x,y\in G$. Admitem că $(G,\circ)$ este grup.
   a) (2p) Arătați că funcția $f:(0,\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ este un izomorfism de la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$ la grupul $(G,\circ)$;
   b) (5p) Calculați $\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{2}{3}\circ\ldots\circ\dfrac{2013}{2014}$.

4. Se consideră $(G,.)$ un grup în care $x^3=e$, $\forall x\in G$ și $x^2y^2=y^2x^2$, $\forall x,y\in G$. Să se arate că G este grup abelian.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primeşte un punctaj de la 0 la 7.
Timp de lucru efectiv 3 ore.