Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a X-a M$_1$

Soluţii şi bareme

1) Afirmaţia este adevărată. …..1p

Exemplu: $a=\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ şi $b=\sqrt{2}$. …..2p

Dacă $a\in\mathbb{Q}$, atunci acesta este exemplul de număr iraţional : $\sqrt{2}$, care ridicat la numărul iraţional $\sqrt{2}$ dă număr raţional. 1p

Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $a^{\sqrt{2}}=\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^{2}=2\in\mathbb{Q}$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi $a^{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$. 3p

2) $£=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ este una dintre rădăcinile complexe nereale ale unităţii. ……1p

Aceasta verifică ecuaţiile: $z^3=1$ şi $z^2+z+1=0$, …..1p

iar $\bar{£}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=£^2$ este cea de-a doua rădăcină complexă nereală a celor două ecuaţii. …..1p

Deci $£^2+£+1=0, £^3=1, £^4=£$ .Atunci vom avea : …..1p

$$\left(z-1\right)^2+\left(z-£\right)^2+\left(z-\bar{£}\right)^2=z^2-2z+1+z^2-2£+£^2+z^2-2\bar{£}+\bar{£}^2=z^2-2z+1+z^2-2£+£^2+z^2-2£^2+£=$$

$$=3z^2-2z\underbrace{\left(£^2+£+1\right)}_{0}+\underbrace{\left(£^2+£+1\right)}_{0}=3z^2$$ …..3p

3) Facem următoarele notaţii :

$\lg a=x, \lg b=y, \lg c=z$

$$Atunci:\lg^2\left(\frac{ab}{c}\right)+\lg^2\left(\frac{bc}{a}\right)+\lg^2\left(\frac{ca}{b}\right)=\left(\lg a+\lg b-\lg c\right)^2+\left(\lg b+\lg c-\lg a\right)^2+\left(\lg c+\lg a-\lg b\right)^2=$$

$$=\left(x+y-z\right)^2+\left(y+z-x\right)^2+\left(z+x-y\right)^2$$ …..2p

$$\lg \frac{abc}{\sqrt[4]{1000}} = \lg a + \lg b + \lg c - \frac{3}{4} = x + y + z - \frac{3}{4}$$ …..1p

Inegalitatea din enunţ devine :

$$\left(x+y-z\right)^2 + \left(y+z-x\right)^2 + \left(z+x-y\right)^2 \geq x+y+z-\frac{3}{4} \Leftrightarrow$$ …..1p

$$3\left(x^2+y^2+z^2\right) + \cancel{2xy} - \cancel{2xz} - \cancel{2yz} + \cancel{2yz} - \cancel{2xy} - 2xz + \cancel{2xz} - 2xy - 2yz \geq x+y+z-\frac{3}{4} \Leftrightarrow$$ …..1p

$$\left(x-y\right)^2 + \left(x-z\right)^2 + \left(y-z\right)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow$$ …..1p

$$\left(x-y\right)^2 + \left(x-z\right)^2 + \left(y-z\right)^2 + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$ …..1p

Cum suma pătratelor unor numere reale este pozitivă, oricare ar fi numerele respective, ultima afirmaţie este adevărată.

4) Aplicăm inegalitatea mediilor pentru numerele reale pozitive: $2^{\sin^2 x}, 2^{\cos^2 x}$: …..1p

$$\frac{2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x}}{2} \geq \sqrt{2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x}} = \sqrt{2^{\sin^2 x + \cos^2 x}} = \sqrt{2}$$ …..2p

Dar conform ecuaţiei din enunţ, rezultă că mediile sunt egale, egalitatea având loc dacă şi numai dacă numerele sunt egale. Deci: …..1p

$$2^{\sin^2 x} = 2^{\cos^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 x$$

dar pentru $x \in \left(0, \frac{\circledR}{2}\right), \sin x > 0, \cos x > 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\circledR}{4}.$ …..3p

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a X-a M$_2$

Soluţii şi bareme

1. Prin ridicare la puterea a 3-a, obţinem $38+17\sqrt{5}=\left(a+b\sqrt{5}\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 38+17\sqrt{5}=a^3+3a^2b\sqrt{5}+15ab^2+5b^3\sqrt{5} \Leftrightarrow 38+17\sqrt{5}=\underbrace{\left(a^3+15ab^2\right)}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{\left(3a^2b+5b^3\right)}_{\in\mathbb{Z}}\sqrt{5} \Leftrightarrow$ …..3p

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+15ab^2=38 \\ 3a^2b+5b^3=17 \end{cases}$ (*altfel, am ajunge la contradicţia* $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}$), de unde …1p

$\begin{cases} a\left(a^2+15b^2\right)=38 \\ b\left(3a^2+5b^2\right)=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a,b>0 \\ b \mid 17 \\ b\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}$ …3p

2. $E=\dfrac{\log_2 x^2+\log_2 x^3+\ldots+\log_2 x^{2014}}{\log_7 x^3+\log_7 x^4+\ldots+\log_2 x^{2014}}=\dfrac{2\log_2 x+3\log_2 x+\ldots+2014\log_2 x}{3\log_7 x+4\log_7 x+\ldots+2014\log_7 x}=\dfrac{\log_2 x(2+3+\ldots+2014)}{\log_7 x(3+4+\ldots+2015)}=$ ……3p

$=\dfrac{\log_2 x\cdot\dfrac{(2+2014)\cdot 2013}{2}}{\log_7 x\cdot\dfrac{(3+2015)\cdot 2013}{2}}=\dfrac{1008\cdot\log_2 x}{1009\cdot\log_7 x}=\dfrac{1008\cdot\dfrac{\lg x}{\lg 2}}{1009\cdot\dfrac{\lg x}{\lg 7}}=\dfrac{1008\cdot\lg 7}{1009\cdot\lg 2}$, …….3p

adică este independentă de *x*, pentru orice $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$. ……1p

3. Condiţii de existenţă: $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x+2\neq 1 \\ 16-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty) \\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\} \\ x\in(-4,4) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-4,1)\cup(2,4)\setminus\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ …5p

şi cum $x\in\mathbb{Z}$, obţinem $x\in\{-3,-2,-1,0,3\}$, ……1p

iar suma acestora este -3. …...1p

4. Fie $z=a+bi$, unde $a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ ……1p

Ecuaţia se rescrie: $a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=8+4i \Leftrightarrow \left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)+bi=8+4i \Leftrightarrow \begin{cases} a+\sqrt{a^2+b^2}=8 \\ b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ \sqrt{a^2+16}=8-a \end{cases}$. …….3p

Se impune condiţia de compatibilitate $8-a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 8 \Leftrightarrow a \in (-\infty, 8]$, ……1p

prin ridicare la pătrat obţinem $a^2+16=64-16a+a^2 \Leftrightarrow 16a=48 \Leftrightarrow a=3$, ……2p

deci soluţia ecuaţiei este $z=3+4i$. ……1p