Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală -15.02.2014

Clasa a XII-a M_1

Soluţii şi bareme

1. Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$,deci admite primitive pe $\mathbb{R}$. Utilizăm formula de integrare prin părţi. ...1p

Cum $\left[\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right]' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}} \cdot \frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\cancel{1+x^2}}{|x|} \cdot \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^{\cancel{2}}} = \frac{2x}{|x|\left(1+x^2\right)}, (\forall)\, x \in \mathbb{R}^*,$ …1p

obţinem: $\int \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx = \int (x)' \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx = x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \int \frac{2|x|}{1+x^2} dx,$ ……2p

Dacă F este o primitivă a lui f , atunci $(\exists)\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \ln\left(1+x^2\right) + c_1,\ x < 0 \\ c_2,\ x = 0 \\ x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \ln\left(1+x^2\right) + c_3, x > 0 \end{cases}$$ …….1p

Cum F este continuă, din condiţia $F(0-0) = F(0+0) = F(0)$, obţinem $c_1 = c_2 = c_3$, …….1p

$$\Rightarrow F(x) = c + \begin{cases} x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \ln\left(1+x^2\right),\ x \le 0 \\ x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \ln\left(1+x^2\right) + c_3, x > 0 \end{cases},\ \text{unde } c \in \mathbb{R}.$$ …….1p

2. **a**) Utilizăm formula de integrare prin părţi, avem:

$$\int \cos\left(x^3+1\right) dx = \int (x)' \cos\left(x^3+1\right) dx = x\cos\left(x^3+1\right) + 3\int x^3 \sin\left(x^3+1\right) dx.$$ …….3p

b) Utilizând formula de integrare prin părţi, obţinem:

$I=\int 4\cos\left(x^3+1\right)dx=\int (4x)'\cos\left(x^3+1\right)dx=4x\cos\left(x^3+1\right)+12\int x^3\sin\left(x^3+1\right)dx=$ …….1p

$=4x\cos\left(x^3+1\right)+12\int\left(\frac{x^4}{4}\right)'\sin\left(x^3+1\right)dx=4x\cos\left(x^3+1\right)+12\frac{x^4}{4}\sin\left(x^3+1\right)-12\int\frac{x^4}{4}\cdot 3x^2\cos\left(x^3+1\right)dx=$ …….1p

$=4x\cos\left(x^3+1\right)+3x^4\sin\left(x^3+1\right)-\underbrace{\int 9x^6\cos\left(x^3+1\right)dx}_{J}, \Rightarrow$ ……1p

$\int\left(4+9x^6\right)\cos\left(x^3+1\right)dx=I+J==4x\cos\left(x^3+1\right)+3x^4\sin\left(x^3+1\right)+C.$ …..1p

3. $x*y=xy-2x-2y+6=xy-2x-2y+4+2=x(y-2)-2(y-2)+2=(x-2)(y-2)+2, (\forall)x,y\in\mathbb{Z}$ …….1p

$x*x=(x-2)^2+2,\ x*x*x=(x*x)*x=(x-2)^3+2,\ldots,\ \underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de } n \text{ ori}}=(x-2)^n+2, (\forall)x\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$ ……1p

Demonstrăm prin inducţie : Fie $x\in\mathbb{Z}, P(n): \underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de } n \text{ ori}}=(x-2)^n+2, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. $P(2)$este adevărat. …..1p

Presupunem $P(k)$ adevărat şi demonstrăm $P(k+1)$, unde $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$ arbitrar fixat.

$P(k+1): \underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de } k+1 \text{ ori}}=\underbrace{(x*x*\ldots*x)}_{\text{de } k \text{ ori}}*x=\left[(x-2)^k+2-2\right](x-2)+2=(x-2)^{k+1}+2$, deci $P(k+1)$ adevărat.

Aşadar $P(n)$ adevărat $(\forall)n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. …….2p

Avem $\underbrace{5*5*\ldots*5}_{\text{de } 2014 \text{ ori}}=(5-2)^{2014}+2=3^{2014}+2$ şi restul împărţirii la 3^{2014} este 2. ……..2p

4. a) $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}1 & 2x & 5x^2-2x\\ 0 & 1 & 5x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2y & 5y^2-2y\\ 0 & 1 & 5y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2y+2x & 5y^2-2y+10xy+5x^2-2x\\ 0 & 1 & 5y+5x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & 2(x+y) & 5(x+y)^2-2(x+y)\\ 0 & 1 & 5(x+y)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A_{x+y}, (\forall)x,y\in\mathbb{R}.$ ……2p

b)Din a) $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, $x+y\in\mathbb{R}$, deci $A_x\cdot A_y\in G$, $(\forall)A_x, A_y\in G$, deci înmulţirea este lege pe G (1) ……0,5p

Observăm că $A_x=A_y\Leftrightarrow x=y$. Înmulţirea matricelor este asociativă pe $M_3(\mathbb{R}), G\subset M_3(\mathbb{R})$, deci şi pe G (2)….0,5p

$A_0=I_3\in G$, deci înmulţirea admite element neutru (3). …..0,5p

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, avem $A_x\cdot A_{-x}=A_{-x}\cdot A_x=A_0=I_3$, deci toate elementele sunt simetrizabile (4). ……0,5p

Din $(1),(2),(3),(4)$ rezultă $(G,\cdot)$ grup. …….0,5p

c) $f\left(A_x \cdot A_y\right) = f\left(A_{x+y}\right) = x + y = f\left(A_x\right) + f\left(A_y\right), (\forall) A_x, A_y \in G$, deci f morfism(A). …….1p

Fie $A_x, A_y \in G$ astfel încât $f\left(A_x\right) = f\left(A_y\right) \Rightarrow x = y \Rightarrow A_x = A_y \Rightarrow f$ injectivă $\left(B_1\right)$. ……..0,5p

Fie $y \in \mathbb{R}$, atunci $(\exists) A_y \in G$ astfel încât $f\left(A_y\right) = y$, deci f surjectivă $\left(B_2\right)$. ……...0,5p

Din $\left(B_1\right)$ şi $\left(B_2\right)$ rezultă f bijectivă (B). Din (A) şi (B) rezultă f izomorfism. ……..0,5p

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XII-a M$_2$

Soluţii și bareme

1. **a**) $2(x-3)(y-3)+3=2\left(x^2-3x-3y+9\right)+3=2xy-6x-6y+21=x*y,\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}.$ ……..2p

b) Căutăm "*zeroul*" legii: $a\in\mathbb{R}$ pentru care $a*x=x*a=a,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$.

$a*x=a\Leftrightarrow 2(a-3)(x-3)+3=a\Leftrightarrow 2(a-3)(x-3)-(a-3)=0\Leftrightarrow(a-3)\left[2(x-3)-1\right]=0,(\forall)x\in\mathbb{R}$, deci $a-3=0\Rightarrow a=3$, …..2p

verificăm $x*3=2(x-3)(3-3)+3=3,(\forall)x\in\mathbb{R}$, deci $3*x=x*3=3,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$. …….1p

Avem $1*2*\ldots*2014\overset{\text{"*" asociativã}}{=}(1*2)*3*(4*\ldots*2014)=3*(4*\ldots*2014)=3.$ …….1p

c) Răspunsul este afirmativ. Putem lua, spre exemplu, $a=3+\sqrt{3},\ b=3+2\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$,

obţinem $a*b=2\left(3+\sqrt{3}-3\right)\left(3+2\sqrt{3}-3\right)+3=15\in\mathbb{N}.$ ……..1p

2. Avem $I+J=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx=x+C$, respectiv …….2p

$-I+J=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C\overset{x\in\left(0,\frac{\text{®}}{2}\right)}{=}\ln(\sin x+\cos x)+C$ …….2p

$I=\frac{1}{2}\left[(I+J)-(-I+J)\right]=\frac{1}{2}\left[x-\ln(\sin x+\cos x)\right]+C$, iar ……1,5p

$J=\frac{1}{2}\left[(I+J)+(-I+J)\right]=\frac{1}{2}\left[x+\ln(\sin x+\cos x)\right]+C$ …...1,5p

3. F este primitivă pentru $f\Leftrightarrow F'(x)=f(x),(\forall)x\in(1,\infty)\Leftrightarrow\left[(ax+b)\sqrt{x-1}\right]'=\sqrt{x-1},(\forall)x\in(1,\infty)\Leftrightarrow$ ……2p

$a\sqrt{x-1}+(ax+b)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 2a(x-1)+(ax+b)=2(x-1)\Leftrightarrow 3ax+(b-2a)=2x-2,(\forall)x\in(1,\infty)\Rightarrow$ ……3p

$\begin{cases}3a=2\\ b-2a=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=-\frac{2}{3}\end{cases}.$ …….2p

4. **a**) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$ şi cum $x+y\in\mathbb{Z}$, rezultă $A(x)\cdot A(y)\in G$, deci înmulţirea este lege pe G (1). ……..1p

Înmulţirea matricelor este asociativă pe $M_2(\mathbb{R})$, $G\subset M_2(\mathbb{R})$, deci şi pe G (2). ……..1p

$A(0)=I_2\in G$, deci înmulţirea admite element neutru (3). …….1p

$(\forall)$ $x\in\mathbb{Z}$, avem $A(x)\cdot A(-x)=A(-x)\cdot A(x)=A(0)=I_2$, deci toate elementele sunt simetrizabile (4). ……1p

Din $(1),(2),(3),(4)$ rezultă $(G,\cdot)$ grup.

b) $f(x+y)=A(x+y)\overset{a)}{=}A(x)\cdot A(y)=f(x)\cdot f(y)$, $(\forall)x,y\in\mathbb{Z}$, deci f morfism (A). …….1p

Fie $x,y\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(x)=f(y)\Rightarrow A(x)=A(y)\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ injectivă (B_1). ……1p

Fie $A(x)\in G$, atunci $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(x)=A(x)$, deci f surjectivă (B_2). …….1p

Din (B_1) şi (B_2) rezultă f bijectivă (B). Din (A) şi (B) rezultă f izomorfism.