

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a M₁

Soluții și bareme

$$1. \left[\frac{4x+4}{4x-5} \right] = \frac{2x-1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{3} = t, t \in \mathbb{Z} \\ \left[\frac{4x+4}{4x-5} \right] - \frac{2x-1}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ \left[\frac{6t+6}{6t-3} \right] - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ \left[\frac{2t+2}{2t-1} \right] - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \frac{2t+2}{2t-1} - t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

....2p

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \frac{-2t^2+3t+2}{2t-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \frac{-2t^2+3t+2}{2t-1} < 1 \\ \frac{-2t^2+3t+2}{2t-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ (-2t^2+3t+2)(2t-1) \geq 0 \\ \frac{-2t^2+t+3}{2t-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ (2t^2-3t-2)(2t-1) \leq 0 \\ (2t^2-t-3)(2t-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

....2p

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ (2t+1)(t-2)(2t-1) \leq 0 \\ (2t-3)(t+1)(2t-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \\ t \in \left(-1, \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ t \in \left(-1, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2 \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

....2p

$$S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}.$$

....1p

$$2. \text{ a) } 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = (x+2)(2x-1)^2 \geq 0, (\forall) x \in [-2, \infty).$$

....3p

$$\text{b) } \text{Dacă } a = b = c = -2 \Rightarrow k \geq \frac{7}{4}, \text{dacă } a = b = c = \frac{1}{2} \Rightarrow k \leq \frac{7}{4}, \text{deci singura valoare posibilă pentru } k \text{ este } \frac{7}{4} \quad \dots 1p$$

$$\text{Din a) rezultă } a^3 + a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{7}{4}a, \quad b^3 + b^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{7}{4}b, \quad c^3 + c^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{7}{4}c, \text{ de unde prin sumare, rezultă } \dots 2p$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{7}{4}(a+b+c), \text{ deci } k = \frac{7}{4}.$$

....1p

3. Demonstrăm prin inducție matematică. Facem verificarea pentru primele 3 valori ale lui n (vezi figura alăturată).1p
 Apoi presupunem $P(k)$: “P tratul poate fi împărțit în k ptrate” adevărat și demonstrăm $P(k+3)$: “P tratul poate fi împărțit în $k+3$ ptrate”.

1	2	3
4	6	
5	6	

1	2	5	
3	4	5	
6		7	

1	2	3	4
5	8		
6	8		
7	8		

.....2p

Pentru demonstrație se observă că prin împărțirea unui ptrat din cele k în 4, obținem $k+3$ ptrate.4p

4. a) Fie M mijlocul lui $[BC]$ și G centrul de greutate al triunghiului ABC . Construim BGCN paralelogram. Atunci vom avea:

(1) $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GN}$ (reg. paralelog.). Din BGCN paralelogram $\Rightarrow BC \cap GN = \{M\}$, mijlocul lui $[BC]$1p

Dar A, G, M coliniare și G, M, N coliniare, deci A, G, M, N coliniare. Avem următoarele relații vectoriale:

$\vec{GN} = 2\vec{GM}$ și $\vec{GA} = -2\vec{GM}$ (G fiind centrul de greutate al $\triangle ABC$).1p

Introducând în relația (1), obținem: $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GN} = -\vec{GA} \Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow$ 1p

$\vec{GO} + \vec{OA} + \vec{GO} + \vec{OB} + \vec{GO} + \vec{OC} = \vec{0} \Rightarrow 3\vec{GO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = -3\vec{GO} \Rightarrow$ 1p

$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG} \Rightarrow \vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ 1p

b) A, B, C pot fi vârfurile unui triunghi dacă și numai dacă A, B, C necoliniare.1p

A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a i $\vec{AB} = k\vec{BC} \Leftrightarrow (a-1)\vec{i} + (b-1)\vec{j} = k(\vec{i} + \vec{j}) \Leftrightarrow a-1 = b-1 = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = b (=k+1)$ Deci A, B, C sunt vârfurile unui triunghi dacă și numai dacă $a \neq b$1p

Olimpiada Națională de Matematică Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a M₂

Soluții și bareme

$$1. \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}, (\forall) a, b \in \mathbb{R} \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2y + b^2x}{xy} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \Leftrightarrow (\text{pt. ca } x+y > 0 \text{ și } xy > 0) (a^2y + b^2x)(x+y) \geq (a+b)^2 xy \quad \dots 3p$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a^2xy} + a^2y^2 + b^2x^2 + \cancel{b^2xy} \geq \cancel{a^2xy} + 2abxy + \cancel{b^2xy} \Leftrightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0 (\forall) a, b \in \mathbb{R}; (\forall) x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad (\text{p tratul oric rui num r real este pozitiv}) \quad \dots 4p$$

2.a) Până la sfârșitul anului sunt 10 luni, iar producția se va dubla de $10 : 2 = 5$ ori. Deci se vor fabrica

$$540(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) = 540 \cdot 2 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 33480 \text{ perechi de pantofi.} \quad \dots 3p$$

b) $276840 : 2 = 138240$ perechi de pantofi, de unde $540 \cdot 2^n = 138240 \Leftrightarrow 2^n = 138240 : 540 \Leftrightarrow 2^n = 256 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 8$, deci după 8 grupe de câte 2 luni, adică 16 luni (1 an și 4 luni), în iulie 2014 se va obține producția de 276480 pantofi.4p

3. $\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD} \Leftrightarrow \overline{MA} - \overline{MD} = \overline{MB} - \overline{MC} \Leftrightarrow \overline{DA} = \overline{CB}$ adevărat, deoarece ABCD paralelogram7p

4. a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} (\forall) n \in \mathbb{N}^* \quad \dots 1p$

b) $S_5 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{5 \cdot 6} \stackrel{a)}{=} \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}. \quad \dots 1p$

c) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \stackrel{a)}{=} \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \quad \dots 1p$

d) $S_n < \frac{11}{12} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{11}{12} \stackrel{n \in \mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} 12n < 11n + 11 \Leftrightarrow n < 11 \text{ si } n \in \mathbb{N}^*, n \text{ maxim} \Rightarrow n = 10. \quad \dots 2p$

e) $S_n > \frac{111}{112} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} > \frac{111}{112} \stackrel{n \in \mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} 112n > 111n + 111 \Leftrightarrow n > 111 \text{ si } n \in \mathbb{N}^*, n \text{ minim} \Rightarrow n = 112. \quad \dots 2p$