Solutii clasa a X-a

1. Notam S=x+y+z>0. Atunci prima ecuatie devine $7x^2 - x - S = 0$ cu solutia $x = \frac{1+\sqrt{1+28S}}{14}$. Analog $y = \frac{1+\sqrt{1+8S}}{4}; z = \frac{1+\sqrt{1+4S}}{2}$. Prin adunare obtinem $28S = 23 + 2\sqrt{1+28S} + 7\sqrt{1+8S} + 14\sqrt{1+2S}$. Notand $S = \frac{1}{t}; t > 0$ obtinem ecuatia $23t + 2\sqrt{t^2+28t} + 7\sqrt{t^2+8t} + 14\sqrt{t^2+4t} = 28$ cu solutia unica S=6 (functia din stanga este strict crescatoare pe $(0,\infty)$). Obtinem solutia problemei x=1,y=2,z=3.

2. Avem $7-4\sqrt{3} = \left(2-\sqrt{3}\right)^2; 26-15\sqrt{3} = \left(2-\sqrt{3}\right)^3$. Ecuatia devine $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{m}} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{m}} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{n}} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{n}}$ Vom folosi urmatorul rezultat: Daca t>0 atunci functia $f(x) = t^x + \frac{1}{t^x}$ este injectiva. Atunci, notand $t = 2+\sqrt{3}$ ecuatia devine $t^{\frac{2}{m}} + \frac{1}{t^{\frac{2}{m}}} = t^{\frac{3}{n}} + \frac{1}{t^{\frac{3}{n}}} \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{m}\right) = f\left(\frac{3}{n}\right)$ de unde conform rezultatului

Obtinem solutia $\frac{m}{2} = \frac{n}{3}$, deci m=2k, n=3k.

3. Luam in (i) $x_i = x$ si obtinem $f\left(x^m\right) = \left[f\left(x\right)\right]^m$ (1) astfel incat relatia (i) devine

$$f\left(\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m}{n}\right) = \frac{f\left(x_1^m\right) + f\left(x_2^m\right) + \ldots + f\left(x_n^m\right)}{n}$$

Luam $x_i^m = y_i$ rezulta $f\left(\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right) = \frac{f\left(y_1\right)+f\left(y_2\right)+\ldots+f\left(y_n\right)}{n}$,iar pentru $y_i = x$ avem $f\left(x\right) = f\left(\frac{(x-1)+x+\ldots+x+(x+1)}{n}\right) = \frac{f\left(x-1\right)+\left(n-2\right)f(x)+f(x+1)}{n}$ de unde 2f(x)=f(x-1) +f(x+1) sau $f(x)-f(x-1) = f(x+1)-f(x)$, deci sirul f(0),f(1),...,f(n),.. este o progresie aritmetica. Pentru x=0 si x=1 in relatia (1) obtinem f(0),f(1) $\in \{0,1\}$. Avem posibilitatile:

f(0)	f(1)	f(2)	f(3)	.....	f(n) ...
0	0	0	0	...	0
0	1	2	3	...	n
1	0	-1	-2	...	1-n
1	1	1	1	...	1

Primele trei posibilitati sunt in contradictie cu conditiile (i),(ii) si (iii) obtinem f(2014)=1.

4(a) Avem C(0),A(a),B(b) si Z(z) centrul cercului. Atunci ZA=ZB=ZC implica $|z|=|z-a|=|z-b|$ de unde prin ridicare la patrat si eliminarea lui $\bar{z}$ obtinem cerinta.

(b) Alegem originea coordonatelor in F(0) si fie $d=\bar{c}$; din a) obtinem

$$p=\frac{ad(\bar{a}-\bar{d})}{\bar{a}d-a\bar{d}};q=\frac{bc(\bar{b}-\bar{c})}{\bar{b}c-b\bar{c}}.$$

Din $CD \parallel AF \Rightarrow \bar{a}=-a$ si din $\mathrm{CD} \parallel \mathrm{BF} \Rightarrow \bar{b}=-b$. Obtinem $p=\frac{\bar{c}(a+c)}{c+\bar{c}};q=\frac{c(b+\bar{c})}{c+\bar{c}}.$

Deoarece punctele A,E,C sunt coliniare si B,E,D sunt coliniare obtinem $e=\frac{a\bar{c}-bc}{a+\bar{c}-b-c}$. Atunci conditia $PQ \perp EF$ este echivalenta cu $\frac{p-q}{\bar{p}-\bar{q}}=-\frac{f-e}{\bar{f}-\bar{e}}$ care rezulta usor din formulele de mai sus.