**Solutii clasa a XI-a**

1Avem $f(x)=x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$ rezulta ca polinomul minimal al matricii A poate fi: $(i)\,m(x)=x-2;(ii)\,m(x)=x^2+x+1;(iii)\,m(x)=f(x)$. Rezulta folosind teorema lui Frobenius avem in fiecare caz in parte:

(i) $P(x)=\det(A-xI_n)=(-1)^n(x-2)^n$ de unde obtinem $|P(0)|=|\det(A)|=2^n$.

(ii) $P(x)=(-1)^n(x^2+x+1)^l$ de unde obtinem $|P(0)|=|\det(A)|=1$.

(iii) $P(x)=(-1)^n(x-2)^p(x^2+x+1)^q$ de unde obtinem $|P(0)|=|\det(A)|=2^p$.

Orice valoare proprie a matricii A verifica relatia din enunt si deoarece matricea A este de ordinal doi va avea doua valori propri astfel:

-$\lambda_1,\lambda_2=2$ atunci $A^2+A+I_2$ este inversabila rezulta $A=I_2$ si $A^3=I_3$. Daca A are o valoare proprie $\lambda_1\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ atunci si $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$ este valoare proprie si atunci matricea $A-2I_2$ este inversabila, de unde $A^2+A+I_2=0$, care prin inmultire cu $A-I_2$ se obtine $A^3=I_2$.

2. a) $W(a_1,a_2,a_3)=(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)$ .

b) Considerăm sistemul $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = a_{n+1}^{n-1} \end{cases}$ .

Determinantul său este $W(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)\neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat, iar din regula lui Cramer obţinem soluția sistemului

$$x_i=\frac{W(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{n+1},a_{i+1},\ldots,a_n)}{W(a_1,a_2,\ldots,a_n)}\ ,\ i=\overline{1,n}\ .$$

Înlocuind în $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ se obține relația cerută.

3. Împărțind relația din ipoteză prin $x_{n-1}^2$ rezultă o inecuație de gradul doi în $\frac{x_n}{x_{n-1}}$. Rezolvând inecuația se obține $1-\frac{1}{n^2}\le\frac{x_n}{x_{n-1}}\le 1$, $\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$. Cum $x_1=1$ şi

$\frac{x_n}{x_{n-1}} \geq 1-\frac{1}{n^2} > 0$ , $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow x_n > 0$ , $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ şi atunci, din

$\frac{x_n}{x_{n-1}} \leq 1$ , $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Cum $0 < x_n \leq 1$ , $\forall n \in \mathbb{N}^*$ deducem că

$(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Atunci, conform teoremei lui Weierstrass, rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Înmulțind relațiile $\frac{x_k}{x_{k-1}} \geq 1-\frac{1}{k^2}$, pentru $k=\overline{2,n} \Rightarrow$

$x_n \geq \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ , $\forall n \geq 2$ de unde, prin trecere la limită se obține

$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \frac{1}{2}$ .

4. a) Pentru $l \in \mathbb{R}$ avem: $\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x > \delta_\varepsilon$ , $|f(g(x)) - l| < \varepsilon$ .

Fie $\varepsilon > 0$. $g$ continuă şi $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow$ există un interval $(\mathrm{M}_\varepsilon, +\infty) \subset g((\delta_\varepsilon, +\infty))$.

$\forall y > M_\varepsilon$ , $\exists x \in (\delta_\varepsilon, +\infty)$ a.î. $y = g(x) \Rightarrow |f(y) - l| = |f(g(x)) - l| < \varepsilon$ .

Prin urmare, $\lim_{y\to\infty} f(y) = l$ . Cazul $l = \pm\infty$ se tratează similar.

b) Funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f(x) = \sin x$ şi $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = [x]\cdot\pi$ , îndeplinesc condițiile cerute.