## Solutii clasa a XII-a

1.(i)Pentru x=1 din relatia data obtinem 4=0, deci 4x=0, $\forall x \in A$. Alegem x=2t, $\forall t \in A$ si relatia devine $16t^3+4t^2+2t=0$ si cum $16t^3=4\left(4t^3\right)=0$ si $4t^2=0$ rezulta 2t=0 $\forall t \in A$. (ii)Relatia data devine $x^2+x=0, \forall x \in A$ sau $x^2=-x \Leftrightarrow x^2=x$ deci inelul este Boolean.Avem $(x+y)^2=x+y \Leftrightarrow x^2+xy+yx+y^2=x+y \Leftrightarrow xy+yx=0$ deci $xy=-yx=yx, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Obs.Un exemplu de astfel de inel este $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$ cu operatiile pe component.

2. Pentru $0 \le a \le 1$ şi $0<\varepsilon<1$ considerăm $g_{\varepsilon,a}(x)=\begin{cases}\frac{a}{\varepsilon}x & , 0 \le x<\varepsilon \\ a & , \varepsilon \le x \le 1\end{cases}$.

Cum $g_{\varepsilon,a}$ e continuă $\Rightarrow \int_0^1 g_{\varepsilon,a}(x)\,dx=\int_0^1 f\left(g_{\varepsilon,a}(x)\right)dx \Rightarrow$

$$\frac{\varepsilon a}{2}+(1-\varepsilon)a=\int_0^\varepsilon f\left(\frac{a}{\varepsilon}x\right)dx+(1-\varepsilon)f(a) \qquad (1)$$

Din teorema de medie, avem $\int_0^\varepsilon f\left(\frac{a}{\varepsilon}x\right)dx=\varepsilon f\left(\frac{a}{\varepsilon}c(\varepsilon)\right)$ unde $0 \le c(\varepsilon) \le \varepsilon$.

Cum *f* e mărginită $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon f\left(\frac{a}{\varepsilon}c(\varepsilon)\right)=0$. Trecând la limită în relaţia (1) pentru $\varepsilon \to 0$ se obține $f(a)=a$. Deci $f(x)=x$, $\forall x \in [0, 1]$.

3. Cum *A* nu are divizori ai lui zero, din $x^4=x$, $\forall x \in A \Rightarrow x^3=1$, $\forall x \neq 0$. Deci fiecare element $x \in A$, $x \neq 0$ este inversabil $\Rightarrow (A,+,\cdot)$ este corp.

Din $x^4=x$, $\forall x \in A \Rightarrow x^4=-x \Rightarrow x+x=0$ $\forall x \in A \Rightarrow x=-x$, $\forall x \in A$.

Pentru $x \neq 0$ şi $x \neq 1$ avem $x^3-1=0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2+x+1\right)=0 \Rightarrow x^2+x=-1$

Polinomul $f=X^4-X \in A[X]$ are ca rădăcini toate elementele corpului comutativ $(A,+,\cdot) \Rightarrow A$ are cel mult patru elemente.

Din $x^4=x$, $\forall x \in A \Rightarrow x^4=-x \Rightarrow x+x=0$ $\forall x \in A \Rightarrow$ Grupul $(A,+)$ are două elemente sau patru elemente.

În concluzie, $(A,+,\cdot)$ este corp cu două sau patru elemente.

4. $\left|\int_0^1 \left(\ln\left(1+x+x^n\right)-\ln(1+x)\right)dx\right| \leq \int_0^1 \left|\ln\frac{1+x+x^n}{1+x}\right| dx = \int_0^1 \left|\ln\left(1+\frac{x^n}{1+x}\right)\right| dx \leq$

$\leq \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$ , $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln\left(1+x+x^n\right)dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1$ .