Inspectoratul Şcolar Judeţean Mehedinţi

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-15 FEBRUARIE 2014
Clasa a XI-a

SUBIECTUL I

Se consideră matricele $A, B, C \in M_3(IR)$ și x o cifră nenulă: $A = \begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 100 \\ 1 & 100 & 10 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \overline{x11} & \overline{1x1} & \overline{11x} \\ \overline{1x1} & \overline{11x} & \overline{x11} \\ \overline{11x} & \overline{x11} & \overline{1x1} \end{pmatrix}$.

a)Să se arate că: $A \cdot B = C$;

b)Să se rezolve ecuația $\det(C) = 0$.

SUBIECTUL II

Fie $a \in IR_+^*$ și $n \in IN, n \geq 2$.

a)Să se arate că $[a] + \left[a + \frac{1}{2}\right] = [2a]$.

b)Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 2}$, $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[a + \frac{k}{n}\right]$ este convergent. ($[a]$ este partea întreagă a lui a)

SUBIECTUL III

Fie $A \in M_2(IR)$ și propozițiile p: $Tr(A) = 1$, ($Tr(A)$ este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A), q: $\det(A) = 2$, r: $\det(A + I_2) = 4$.

Să se arate că dacă două dintre propoziții sunt adevărate, este și adevărată și a treia.

SUBIECTUL IV

Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Considerăm șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = tg\alpha$ și $a_{n+1} = a_n^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha, n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n(a_n - 1)$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.