

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-15 FEBRUARIE 2014
Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

Pe mulțimea \mathfrak{R} definim legea de compoziție :

$$x * y = \left(\sqrt[2015]{x} + \sqrt[2015]{y} \right)^{2015}.$$

Să se arate că $(\mathfrak{R}, *)$ este grup abelian și că $(\mathfrak{R}, *) \cong (\mathfrak{R}, +)$.

SUBIECTUL II

Calculați : $\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ fără a utiliza o schimbare de variabilă.

SUBIECTUL III

Fie $G = \left\{ 0, \frac{1}{2013}, \frac{2}{2013}, \dots, \frac{2012}{2013} \right\}$. Definim pe G legea de compoziție $x * y = \{x + y\}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x . Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian și că $(G, *) \cong (Z_{2013}, +)$.

SUBIECTUL IV

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ și

$$I_n = \int_2^{3n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] dx$$

a) Să se calculeze I_3 .

b) Să se arate că $\frac{5n-6}{2} \leq I_n \leq \frac{5n-4}{2}$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.