

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

CLASA a V-a

1. Există numere \overline{abcd} , cu proprietatea că $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2014$?

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat

2. Să se demonstreze că numărul $A = \underbrace{\overline{abbabb\dots abb}}_{2016 \text{ cifre}}$ nu poate fi pătrat perfect.

Simona Slobodeanu, profesor, Brăila

3. 9 numere naturale, fiecare cu cel mult două cifre, termeni consecutivi ai șirului

$$4, 9, 14, 19, 24, \dots,$$

au suma egală cu un cub perfect. Așezând arbitrar aceste numere într-un pătrat cu 3 linii și 3 coloane se poate obține o linie sau o coloană cu produsul elementelor un pătrat perfect? Justificați răspunsul.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014

SOLUȚII, CLASA A V-A

1. Există numere \overline{abcd} , cu proprietatea că $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2014$?

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat

Soluție. Adunând unitățile, adică, $d + d + d + d$, trebuie să obținem un număr care se termină cu 4.

Avem următoarele cazuri :

I) $d = 1$; adunând zecile, adică, $c + c + c$, trebuie să obținem un număr care se termină cu 1. Rezultă că $c = 7$ și avem suma zecilor egală cu 21, adică două sute plus o zece ; adunând sutele, adică, $b + b + 2$, trebuie să obținem un număr care se termină cu 0 .

Rezultă că avem cazurile :

a) $b = 4$; astfel vom avea $4 + 4 + 2 = 10$, deci, scriem 0 și vom avea $a + 1 = 2$, deci $a = 1$. Astfel, am obținut numărul 1471 .

b) $b = 9$; astfel vom avea $9 + 9 + 2 = 20$, deci, scriem 0 și vom avea $a + 2 = 2$, deci $a = 0$. Acest caz nu poate avea loc .

II) $d = 6$; avem, deci, $6 + 6 + 6 + 6 = 24$; scriem 4 și adunăm zecile : $c + c + c + 2$, care trebuie să dea un număr care să se termine cu 1, deci, $c = 3$ și avem $3 + 3 + 3 + 2 = 11$. Scriem 1 și adunăm sutele : $b + b + 1$, care trebuie să dea un număr care să se termine cu 0 . Acest caz nu poate avea loc .

În concluzie, precizăm că există numărul 1471, pentru care avem:

$$1471 + 471 + 71 + 1 = 2014.$$

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

SOLUȚII, CLASA A V-A

2. Să se demonstreze că numărul $A = \overbrace{abbabb\dots abb}^{2016 \text{ cifre}}$ nu poate fi pătrat perfect.

Simona Slobodeanu, profesor, Brăila

Soluție. Se poate scrie

$$\begin{aligned} A &= \overline{abb} \cdot (10^{2013} + 10^{2010} + \dots + 10^9 + 10^6 + 10^3 + 1) = \\ &= \overline{abb} \cdot [10^{2010} (10^3 + 1) + 10^{2004} (10^3 + 1) + \dots + 10^6 (10^3 + 1) + (10^3 + 1)] = \\ &= \overline{abb} \cdot (10^3 + 1) \cdot (10^{2010} + 10^{2004} + \dots + 10^6 + 1) = \\ &= \overline{abb} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (10^{2010} + 10^{2004} + \dots + 10^6 + 1). \end{aligned}$$

Ținând cont că $10^{6k} \equiv (10^6)^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{11}$, obținem

$$10^{2010} + 10^{2004} + \dots + 10^6 + 1 \equiv \underbrace{1+1+\dots+1+1}_{\text{de } 336 \text{ de ori } 1} \equiv 336 \equiv 6 \pmod{11}.$$

Cum $\overline{abb} \equiv 100a + 11b \equiv a + 99a + 11b \equiv a \pmod{11} \Rightarrow \overline{abb}$ nedivizibil cu 11, deoarece $a \neq 0$.

Am dedus astfel că numărul A este divizibil cu 11, dar nu este divizibil cu 11^2 , ceea ce spune că nu poate fi pătrat perfect.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

SOLUȚII, CLASA A V-A

3. 9 numere naturale, fiecare cu cel mult două cifre, termeni consecutivi ai șirului 4, 9, 14, 19, 24, ..., au suma egală cu un cub perfect. Așezând arbitrar aceste numere într-un pătrat cu 3 linii și 3 coloane se poate obține o linie sau o coloană cu produsul elementelor un pătrat perfect? Justificați răspunsul.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluție. Notăm primul număr cu $5k-1$, $k \geq 1 \Rightarrow$ ultimul număr este $5k+39$,
 $5k+39 \leq 99 \Rightarrow 5k \leq 60 \Rightarrow k \leq 12$. Suma lor este $S = \frac{(5k-1+5k+39) \cdot 9}{2} = (5k+19) \cdot 9$.

Avem $1 \leq k \leq 12 \Leftrightarrow 5 \leq 5k \leq 60 \Leftrightarrow 24 \leq 5k+19 \leq 79 \Leftrightarrow 216 \leq (5k+19) \cdot 9 \leq 711$ și fiind un cub perfect, $(5k+19) \cdot 9 \in \{6^3, 7^3, 8^3\}$.

Doar 6^3 este divizibil cu $9 \Rightarrow (5k+19) \cdot 9 = 6^3 \Rightarrow 5k+19 = 24 \Rightarrow k = 1$ și cele 9 numere sunt $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $14 = 2 \cdot 7$, $19 = \text{nr. prim}$, $24 = 2^3 \cdot 3$, $29 = \text{nr. prim}$, $34 = 2 \cdot 17$, $39 = 3 \cdot 13$, $44 = 2^2 \cdot 11$.

Presupunem prin reducere la absurd că există o linie (demonstrație analoagă pentru coloană) cu produsul P al elementelor egal cu un pătrat perfect și notăm cu L mulțimea formată din cele 3 numere de pe acea linie.

1. Dacă $14 \in L \Rightarrow P$ divizibil cu 7 și P nedivizibil cu 7^2 .
2. Dacă $19 \in L \Rightarrow P$ divizibil cu 19 și P nedivizibil cu 19^2 .
3. Dacă $29 \in L \Rightarrow P$ divizibil cu 29 și P nedivizibil cu 29^2 .
4. Dacă $34 \in L \Rightarrow P$ divizibil cu 17 și P nedivizibil cu 17^2 .
5. Dacă $39 \in L \Rightarrow P$ divizibil cu 13 și P nedivizibil cu 13^2 .
6. Dacă $44 \in L \Rightarrow P$ divizibil cu 11 și P nedivizibil cu 11^2 .

În cele 6 cazuri P nu este pătrat perfect, deci rămân doar 3 numere care se pot afla în mulțimea L , adică $L = \{4, 9, 24\} \Rightarrow P = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3^3$ care nu este pătrat perfect.

Deci nu există niciun caz în care P să fie pătrat perfect.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

CLASA a VI-a

1. Determinați numerele a, b, c, d, e , știind că sunt măsurile unghiurilor din jurul unui punct și sunt îndeplinite condițiile :

- numerele $0,75 \cdot a; 0,6 \cdot b; 0,(3) \cdot c$ sunt direct proporționale cu numerele 3; 3 și 2;
- numerele $0,8(3) \cdot c; 0,(5) \cdot d; 0,2(7) \cdot e$ sunt invers proporționale cu numerele 2; 2 și 3.

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat

2. Dacă unui număr natural nenul A îi efectuăm următoarele transformări:

- fiecare cifră mai mică decât 5 (dacă există) crește cu 1,
 - fiecare cifră cel puțin egală cu 5 (dacă există) descrește cu 1,
- obținem numărul natural B și spunem astfel că A este *prieten* al lui B .

a) Determinați numărul *prietenilor* lui 2014. Justificați răspunsul dat.

b) Arătați că numărul *prietenilor* numărului $\underbrace{456456\dots456}_{\text{de } 1007 \text{ ori } 456}$ este pătrat perfect.

Marius Damian, profesor, Brăila

3. Se dau mulțimile:

$$A = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim, } p^6 + 6^p = 945\} \text{ și } B = \{(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p \text{ prim, } p^6 + 6^p = 6n + 945\}.$$

Să se demonstreze egalitatea: $\text{Card } A = \text{Card } B$.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

SOLUȚII, CLASA A VI-A

1. Determinați numerele a, b, c, d, e, știind că sunt măsurile unghiurilor din jurul unui punct și sunt îndeplinite condițiile :

- numerele $0,75 \cdot a$; $0,6 \cdot b$; $0,(3) \cdot c$ sunt direct proporționale cu numerele 3; 3 și 2;
- numerele $0,8(3) \cdot c$; $0,(5) \cdot d$; $0,2(7) \cdot e$ sunt invers proporționale cu numerele 2; 2 și 3.

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat

Soluție. Din prima condiție rezultă:

$$\frac{0,75a}{3} = \frac{0,6b}{3} = \frac{0,(3)c}{2} \Leftrightarrow \frac{75a}{300} = \frac{6b}{30} = \frac{3c}{18} \Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} \quad (1)$$

Din a doua condiție rezultă :

$$2 \cdot 0,8(3)c = 2 \cdot 0,(5)d = 3 \cdot 0,2(7)e \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{75c}{90} = 2 \cdot \frac{5d}{9} = 3 \cdot \frac{25e}{90} \Leftrightarrow \frac{5c}{3} = \frac{10d}{9} = \frac{5e}{6} \quad (2).$$

Înmulțind egalitățile (2) cu $\frac{1}{10}$, obținem :

$$\frac{c}{6} = \frac{d}{9} = \frac{e}{12} \quad (3).$$

Din (1) și (3) rezultă șirul de rapoarte egale :

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = \frac{d}{9} = \frac{e}{12} = \frac{360^0}{36} = 10^0$$

și, astfel, obținem :

$$a = 40^0, \quad b = 50^0, \quad c = 60^0, \quad d = 90^0, \quad e = 120^0.$$

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

SOLUȚII, CLASA A VI-A

2. Dacă unui număr natural nenul A îi efectuăm următoarele transformări:
- fiecare cifră mai mică decât 5 (dacă există) crește cu 1,
 - fiecare cifră cel puțin egală cu 5 (dacă există) descrește cu 1,
- obținem numărul natural B și spunem astfel că A este *prieten* al lui B .
- a) Determinați numărul *prietenilor* lui 2014. Justificați răspunsul dat.
- b) Arătați că numărul *prietenilor* numărului $\underbrace{456456\dots456}_{\text{de } 1007 \text{ ori } 456}$ este pătrat perfect.

Marius Damian, profesor, Brăila

Soluție. a) Numărul prietenilor lui 2014 este 0. Într-adevăr, dacă 2014 ar avea un prieten, acesta ar fi de forma \overline{abcd} .

Dacă $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, atunci b se transformă în $b+1 \neq 0$, iar dacă $b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, atunci b se transformă în $b-1 \neq 0$. Concluzia este că 2014 nu are prieteni.

b) Un prieten al lui $\underbrace{456456\dots456}_{\text{de } 1007 \text{ ori } 456}$ are forma $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{3019} a_{3020} a_{3021}}$.

Conform regulilor impuse de problemă, deducem că:

- fiecare dintre cifrele $a_1, a_4, \dots, a_{3019}$ trebuie să fie egală cu 3 sau cu 5, deci există $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{1007} = 2^{1007}$ moduri de alegere a cifrelor $a_1, a_4, \dots, a_{3019}$;
- fiecare dintre cifrele $a_2, a_5, \dots, a_{3020}$ trebuie să fie egală cu 4 sau cu 6, deci există $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{1007} = 2^{1007}$ moduri de alegere a cifrelor $a_2, a_5, \dots, a_{3020}$.
- fiecare dintre cifrele $a_3, a_6, \dots, a_{3021}$ trebuie să fie egală cu 7, deci există un singur mod de alegere a cifrelor $a_3, a_6, \dots, a_{3021}$.

În final, conform regulii produsului, deducem că numărul prietenilor lui $\underbrace{456456\dots456}_{\text{de } 1007 \text{ ori } 456}$ este egal cu $2^{1007} \cdot 2^{1007} \cdot 1 = (2^{1007})^2$.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

SOLUȚII, CLASA A VI-A

3. Se dau mulțimile:

$$A = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim, } p^6 + 6^p = 945\} \text{ și } B = \{(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p \text{ prim, } p^6 + 6^p = 6n + 945\}.$$

Să se demonstreze egalitatea $\text{Card } A = \text{Card } B$.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluție. Pentru $p = 3 \Rightarrow p^6 + 6^p = 3^6 + 6^3 = 729 + 216 = 945$.

Pentru $p > 3 \Rightarrow p^6 + 6^p > 3^6 + 6^3 = 945$ și pentru $p < 3$ (adică $p = 2$) $\Rightarrow p^6 + 6^p < 3^6 + 6^3 = 945$. Deci $A = \{3\} \Rightarrow \text{Card } A = 1$.

Vom demonstra că și $\text{Card } B = 1$.

Pentru $p = 2$, avem:

$$2^6 + 6^2 = 6n + 945 \Leftrightarrow 64 + 36 = 6n + 945 \Leftrightarrow 6n = -845 \Leftrightarrow n = -\frac{845}{6} \notin \mathbb{N}.$$

Pentru $p = 3$, avem:

$$3^6 + 6^3 = 6n + 945 \Leftrightarrow 945 = 6n + 945 \Leftrightarrow n = 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow (0, 3) \in B.$$

Pentru $p \geq 5$, p prim, avem:

$$p \in \mathcal{M}_6 + 1 \text{ sau } p \in \mathcal{M}_6 + 5 \Rightarrow p^2 \in \mathcal{M}_6 + 1 \Rightarrow p^6 \in \mathcal{M}_6 + 1 \Rightarrow p^6 + 6^p \in \mathcal{M}_6 + 1.$$

Dar $6n + 945 = 6n + 942 + 3 \in \mathcal{M}_6 + 3$, deci egalitatea $p^6 + 6^p = 6n + 945$ nu poate avea loc.

Rezultă că $B = \{(0, 3)\} \Rightarrow \text{Card } B = 1 \Rightarrow \text{Card } A = \text{Card } B$.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

CLASA a VII-a

1. Fie expresia $E(a,b) = \frac{2a+5}{a+4} + \frac{3b+1}{2b+3}$.

a) Să se arate că $2 - \frac{3}{a+4} = \frac{2a+5}{a+4}$.

b) Să se determine a, b numere întregi astfel încât $E(a,b) = 2$.

c) Dacă a, b sunt numere naturale, să se determine elementele mulțimii

$$M = \{E(a,b) \mid E(a,b) \in \mathbb{N}\}.$$

Enache Pătrașcu, profesor, Focșani

2. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și fie punctele $E \in (BC)$, $F \in (AD)$ astfel încât $BE = DF$. Notăm cu M mijlocul segmentului $[EF]$ și cu P punctul de intersecție a dreptelor CM și AB . Demonstrați că $CF \parallel EP$.

Marius Damian, profesor, Brăila

3. 16 numere naturale consecutive, de câte două cifre, au suma egală cu un cub perfect. Așezând arbitrar aceste numere într-un pătrat cu 4 linii și 4 coloane, se poate obține o linie sau o coloană cu produsul elementelor un pătrat perfect? Justificați răspunsul!

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

SOLUȚII, CLASA A VII-A

1. Fie expresia $E(a,b) = \frac{2a+5}{a+4} + \frac{3b+1}{2b+3}$.

a) Să se arate că $2 - \frac{3}{a+4} = \frac{2a+5}{a+4}$.

b) Să se determine a, b numere întregi astfel încât $E(a,b) = 2$.

c) Dacă a, b sunt numere naturale, să se determine elementele mulțimii

$$M = \{E(a,b) \mid E(a,b) \in \mathbb{N}\}.$$

Enache Pătrașcu, profesor, Focșani

Soluție. a) Calcul direct.

$$\begin{aligned} \text{b) } E(a,b) = 2 &\Rightarrow 2 - \frac{3}{a+4} + \frac{3b+1}{2b+3} = 2 \Rightarrow \frac{3}{a+4} = \frac{3b+1}{2b+3} \Rightarrow a+4 = \frac{3(2b+3)}{3b+1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = -4 + \frac{6b+9}{3b+1} = -4 + \frac{6b+2+7}{3b+1} = -4 + 2 + \frac{7}{3b+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3b+1 \in \{-7, -1, 1, 7\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3b \in \{0, 6\} \Rightarrow b \in \{0, 2\}. \text{ Apar situațiile:} \end{aligned}$$

- $b = 0 \Rightarrow a = -2 + 7 = 5;$
- $b = 2 \Rightarrow a = -2 + 1 = -1,$

deci ecuația are exact două soluții: $(a,b) = (5,0)$ și $(a,b) = (-1,2)$.

c) Căutăm $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $E(a,b) = \frac{2a+5}{a+4} + \frac{3b+1}{2b+3} \in \mathbb{N}$. Evaluăm cei doi

termeni ai sumei:

- $1 < \frac{2a+5}{a+4} < 2 \Leftrightarrow a+4 < 2a+5 < 2a+8$, evident;
- $0 < \frac{3b+1}{2b+3} < 2 \Leftrightarrow 0 < 3b+1 < 4b+6$, evident.

Atunci $1 < \frac{2a+5}{a+4} + \frac{3b+1}{2b+3} < 4$ și cum $\frac{2a+5}{a+4} + \frac{3b+1}{2b+3}$ trebuie să fie număr natural, ar

trebuie să existe $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{2a+5}{a+4} + \frac{3b+1}{2b+3} = 2$ sau $\frac{2a+5}{a+4} + \frac{3b+1}{2b+3} = 3$.

Ținând cont că $E(5,0) = 2$ și $E(9,5) = 3$, adică valorile 2 și 3 sunt atinse, rezultă că $M = \{2,3\}$.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

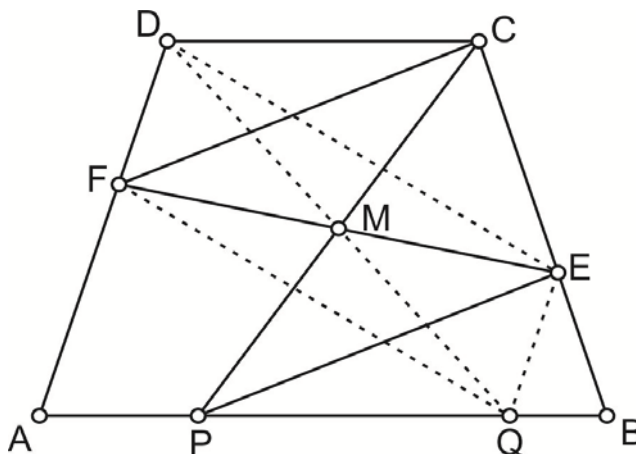
SOLUȚII, CLASA A VII-A

2. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și fie punctele $E \in (BC)$, $F \in (AD)$ astfel încât $BE = DF$. Notăm cu M mijlocul segmentului $[EF]$ și cu P punctul de intersecție a dreptelor CM și AB .

Demonstrați că $CF \parallel EP$.

Marius Damian, profesor, Brăila

Soluție. Construim $EQ \parallel AD$, $Q \in AB$.



Atunci $\sphericalangle EQB \equiv \sphericalangle DAB$ (corespondente) și cum trapezul $ABCD$ este isoscel, avem $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$. Deducem că $\sphericalangle EQB \equiv \sphericalangle EBQ$, deci $\triangle EQB$ este isoscel cu $EQ = EB$ și cum din ipoteză $DF = EB$, obținem $DF = EQ$.

Din $DF \parallel EQ$ și $DF = EQ$ rezultă că $DFQE$ este paralelogram, deci prin mijlocul M al diagonalei $[EF]$ trece și diagonala $[DQ]$.

Deducem acum că $\triangle MCD \equiv \triangle MPQ$ (U.L.U.) și astfel $CM = MP$ care împreună cu $EM = MF$ implică $CEPF$ paralelogram, deci $CF \parallel EP$.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

SOLUȚII, CLASA A VII-A

3. 16 numere naturale consecutive, de câte două cifre, au suma egală cu un cub perfect. Așezând arbitrar aceste numere într-un pătrat cu 4 linii și 4 coloane, se poate obține o linie sau o coloană cu produsul elementelor un pătrat perfect? Justificați răspunsul!

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluție. Notăm cu $n, n+1, n+2, \dots, n+15$ numerele cu suma

$$S = n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+15) = \frac{(n+n+15) \cdot 16}{2} = (2n+15) \cdot 8,$$

de unde rezultă că $2n+15$ este cub perfect impar.

Avem $n \geq 10$ și $n+15 \leq 99 \Rightarrow 10 \leq n \leq 84 \Rightarrow 20 \leq 2n \leq 168 \Rightarrow 35 \leq 2n+15 \leq 183 \Rightarrow 2n+15 = 125 \Rightarrow n = 45$ și cele 16 numere sunt: $55 = 5 \cdot 11$, $56 = 2^3 \cdot 7$, $57 = 3 \cdot 19$, $58 = 2 \cdot 29$, $59 = \text{nr. prim}$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $61 = \text{nr. prim}$, $62 = 2 \cdot 31$, $63 = 3^2 \cdot 7$, $64 = 2^6 = 8^2$, $65 = 5 \cdot 13$, $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$, $67 = \text{nr. prim}$, $68 = 2^2 \cdot 17$, $69 = 3 \cdot 23$, $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.

Presupunem prin reducere la absurd că există o linie (demonstrație analogă pentru coloană) cu produsul P al elementelor egal cu un pătrat perfect și notăm cu L mulțimea formată din cele 4 numere de pe acea linie.

Dacă $57 \in L \Rightarrow P:19$ și P nu este divizibil cu $19^2 \Rightarrow P$ nu este pătrat perfect.

Dacă $58 \in L \Rightarrow P:29$ și P nu este divizibil cu $29^2 \Rightarrow P$ nu este pătrat perfect și folosim aceeași idee în cazurile $59 \in L$, $61 \in L$, $62 \in L$, $65 \in L$, $67 \in L$, $68 \in L$, $69 \in L$.

Rămân doar 7 numere care se pot afla în mulțimea L , adică 55, 56, 60, 63, 64, 66, 70. Reamintim că $55 = 5 \cdot 11$, $56 = 2^3 \cdot 7$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $63 = 3^2 \cdot 7$, $64 = 2^6 = 8^2$, $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ și $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.

Notăm cu $A = \{55, 60, 70\}$ mulțimea numerelor divizibile cu 5, cu $B = \{56, 63, 70\}$ mulțimea numerelor divizibile cu 7 și cu $C = \{55, 66\}$ mulțimea numerelor divizibile cu 11. Fiecare din cele trei mulțimi trebuie să aibă un număr par de elemente pe linia dată, adică 0 sau 2.

I. Dacă L nu conține niciun element din $A \Rightarrow L = \{56, 63, 64, 66\}$ și P nu este pătrat perfect.

II. Dacă L nu conține niciun element din $B \Rightarrow L = \{55, 60, 64, 66\}$, deci $P = 5 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 8^2 \cdot 11^2$ și nu este pătrat perfect.

Cazurile I și II nefiind posibile $\Rightarrow A$ și B au câte 2 elemente pe linia dată.

1. Dacă $70 \notin L \Rightarrow L = \{55, 60, 56, 63\} \Rightarrow P$ nu este pătrat perfect.

2. Dacă $70 \in L$ avem:

i) $55, 70 \in L, 60 \notin L$. Din $55 \in L \Rightarrow 66 \in L \Rightarrow 55, 66, 70 \in L$ cu

a) $56 \in L, 63 \notin L \Rightarrow P = 55 \cdot 66 \cdot 70 \cdot 56 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$ care nu este

pătrat perfect;

b) $56 \notin L, 63 \in L \Rightarrow P = 55 \cdot 66 \cdot 70 \cdot 63 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$ care nu este pătrat perfect.

ii) $60, 70 \in L, 55 \notin L$. Din $55 \notin L \Rightarrow 66 \notin L$ cu

a) $56 \in L, 63 \notin L \Rightarrow P = 60 \cdot 70 \cdot 56 \cdot 64 = 2^6 \cdot 8^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ care nu este pătrat perfect;

b) $56 \notin L, 63 \in L \Rightarrow P = 60 \cdot 70 \cdot 63 \cdot 64 = 2^2 \cdot 8^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ care nu este pătrat perfect.

Deci P nu este pătrat perfect în niciunul din cazurile studiate.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
EDIȚIA a XXII-a , BRĂILA, 17.05.2014**

CLASA A VIII-A

1. În piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu muchia bazei $AB = a$ notăm M cu mijlocul muchiei $[CV]$. Dacă $m(\angle MBC) = 30^\circ$, aflați distanța de la A la dreapta BM .

Gazeta matematică

2. Aflați x și y numere întregi care verifică relația $xy = 3(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

3. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale strict pozitive, $n \geq 2$ Demonstrați că:

$$\frac{na_1 + 4}{n^2(a_2 + a_3 + \dots + a_n)} + \frac{na_2 + 4}{n^2(a_1 + a_3 + \dots + a_n)} + \dots + \frac{na_n + 4}{n^2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + 4}{(n-1)(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)}.$$

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”

Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014

SOLUȚII, CLASA A VIII-A

1. În piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu muchia bazei $AB = a$ notăm M cu mijlocul muchiei $[CV]$. Dacă $m(\angle MBC) = 30^0$, aflați distanța de la A la dreapta BM .

Soluție:

Construim $VN \perp BC$ ($N \in (BC)$) și notăm $\{G\} = VN \cap BM$. Observăm G că este centrul de greutate al triunghiului VBC și deci $VG = 2GN$ (1).

În triunghiului BGN avem $m(\angle BNG) = 90^0$ și $m(\angle GBN) = 30^0$ de unde $BG = 2GN$ (2).

Din (1), (2) $\Rightarrow BG = 2VG$ și deci $BM = VN$. Din ultima relație deduce că în triunghiul VBC avem $CV = CB$. Dar $CV = BV$, așadar triunghiul VBC este echilateral. Deci $VABC$ este un tetraedru regulat și astfel $AG \perp (VBC)$. Deci distanța de la A la dreapta BM este lungimea înălțimii

tetraedrului regulat de muchie a , adică $AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”

Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014

SOLUȚII, CLASA A VIII-A

2. Aflați x și y numere întregi care verifică relația $xy = 3\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

Deducem că $x^2 + y^2$ este pătrat perfect deci

$$\sqrt{x^2 + y^2} = t \in \mathbb{N} \Rightarrow xy = 3t - 3 \Rightarrow (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = t^2 + 6t - 6 = (t + 3)^2 - 15 \Rightarrow (x + y)^2 - (t + 3)^2 = -15 \Rightarrow (x + y - t - 3)(x + y + t + 3) = -15; x + y - t - 3 < x + y + t + 3$$

Cazul 1

$$\begin{cases} x + y - t - 3 = -1 \\ x + y + t + 3 = 15 \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \{(3, 4); (4, 3)\}$$

Cazul 2

$$\begin{cases} x + y - t - 3 = -3 \\ x + y + t + 3 = 5 \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \{(0, 1); (1, 0)\}$$

Cazul 3

$$\begin{cases} x + y - t - 3 = -5 \\ x + y + t + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \{(0, -1); (-1, 0)\}$$

Cazul 4

$$\begin{cases} x + y - t - 3 = -15 \\ x + y + t + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \{(-3, -4); (-4, -3)\}$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”

Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014

SOLUȚII, CLASA A VIII-A

3. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale strict pozitive, $n \geq 2$ Demonstrați că:

$$\frac{na_1 + 4}{n^2(a_2 + a_3 + \dots + a_n)} + \frac{na_2 + 4}{n^2(a_1 + a_3 + \dots + a_n)} + \dots + \frac{na_n + 4}{n^2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + 4}{(n-1)(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)}.$$

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

Notăm cu $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Atunci avem

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \dots + \frac{a_n}{S - a_n} = \frac{a_1^2}{a_1 S - a_1^2} + \frac{a_2^2}{a_2 S - a_2^2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n S - a_n^2} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{S^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} =$$

$$\frac{S^2}{S^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}, \text{ din inegalitatea lui Bergstrom.}$$

Apoi
avem

$$\frac{S^2}{S^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \geq \frac{n}{n-1} \Leftrightarrow (n-1)S^2 \geq nS^2 - n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \Leftrightarrow n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq S^2$$

adevărat din C.B.S.. Am arătat, deci, că

$$\frac{na_1}{n^2(a_2 + a_3 + \dots + a_n)} + \frac{na_2}{n^2(a_1 + a_3 + \dots + a_n)} + \dots + \frac{na_n}{n^2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})} \geq \frac{1}{n-1}, (1).$$

Din inegalitatea mediilor avem

$$\frac{1}{S - a_1} + \frac{1}{S - a_2} + \dots + \frac{1}{S - a_n} \geq \frac{n^2}{S - a_1 + S - a_2 + \dots + S - a_n} = \frac{n^2}{(n-1)S}; \text{ deci rezultă că}$$

$$\frac{4}{n^2(a_2 + a_3 + \dots + a_n)} + \frac{4}{n^2(a_1 + a_3 + \dots + a_n)} + \dots + \frac{4}{n^2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})} \geq \frac{4}{n^2} \frac{n^2}{(n-1)S} = \frac{4}{(n-1)S}, (2)$$

Din (1) și (2) avem

$$\begin{aligned} & \frac{na_1 + 4}{n^2(a_2 + a_3 + \dots + a_n)} + \frac{na_2 + 4}{n^2(a_1 + a_3 + \dots + a_n)} + \dots + \frac{na_{n-1} + 4}{n^2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \geq \frac{1}{n-1} + \frac{4}{(n-1)S} = \\ & = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + 4}{(n-1)(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)} \end{aligned}$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014

CLASA a IX-a

1. Se dă un triunghi oarecare ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ cu $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 2$. Pe semidreptele (BN) și (CM) se iau punctele Q respectiv P cu $\frac{BQ}{BN} = k_1$ și $\frac{CP}{CM} = k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$.

Știind că A, P, Q sunt coliniare, să se determine restul împărțirii la 5 a lui $k_1 + k_2$.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

2. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ o progresie aritmetică de rație r și $(b_n)_{n \geq 0}$ un șir dat de formula $b_n = [a_n]$, $\forall n \geq 0$. Să se arate că $(b_n)_{n \geq 0}$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $r \in \mathbb{Z}$.

Marius Mohonea, profesor, Focșani

3. Fie a, b, c numere reale strict pozitive cu proprietatea că $ab + bc + ca = 3$.

Să se determine minimul expresiei $\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{c^2 + a^2 + \frac{1}{b^2}}$.

Cristian Lazăr, profesor, Iași

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

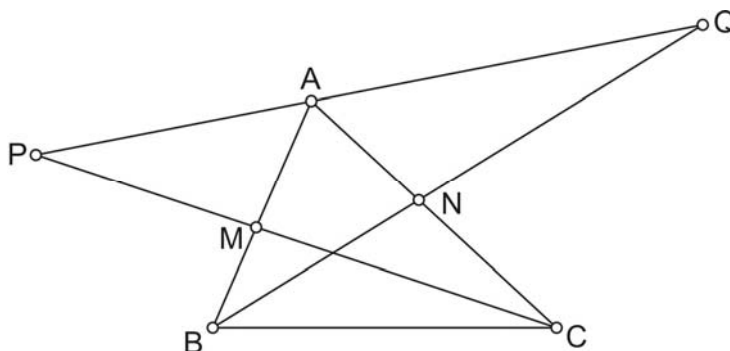
SOLUȚII, CLASA A IX-A

1. Se dă un triunghi oarecare ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ cu $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 2$. Pe semidreptele (BN) și (CM) se iau punctele Q respectiv P cu $\frac{BQ}{BN} = k_1$ și $\frac{CP}{CM} = k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$.

Știind că A, P, Q sunt coliniare, să se determine restul împărțirii la 5 a lui $k_1 + k_2$.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluție. $\overline{BN} = \overline{BA} + \overline{AN} = -\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC} \Rightarrow \overline{BQ} = k_1 \left(-\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC} \right) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \overline{AQ} = \overline{AB} + \overline{BQ} = \overline{AB} + k_1 \left(-\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC} \right) = (1-k_1)\overline{AB} + \frac{2}{3}k_1\overline{AC}.$



$$\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM} = -\overline{AC} + \frac{2}{3}\overline{AB} \Rightarrow \overline{CP} = k_2 \left(\frac{2}{3}\overline{AB} - \overline{AC} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AP} = \overline{AC} + \overline{CP} = \overline{AC} + k_2 \left(\frac{2}{3}\overline{AB} - \overline{AC} \right) = \frac{2}{3}k_2\overline{AB} + (1-k_2)\overline{AC}.$$

$$A, P, Q \text{ coliniare} \Leftrightarrow \overline{AQ} \text{ și } \overline{AP} \text{ coliniari} \Leftrightarrow \frac{1-k_1}{\frac{2}{3}k_2} = \frac{\frac{2}{3}k_1}{1-k_2} \Leftrightarrow (1-k_1)(1-k_2) = \frac{4}{9}k_1k_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-k_1-k_2+k_1k_2 = \frac{4}{9}k_1k_2 \Leftrightarrow 5k_1k_2-9k_1-9k_2+9=0 \Leftrightarrow k_1(5k_2-9)=9k_2-9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1 = \frac{9k_2-9}{5k_2-9}. \text{ Dar } k_1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 5k_1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{45k_2-45}{5k_2-9} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{45k_2-81+36}{5k_2-9} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 + \frac{36}{5k_2-9} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 5k_2-9 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5k_2 \in \{10, 11, 12, 13, 15, 18, 21, 27, 45\} \Rightarrow k_2 \in \{2, 3, 9\}.$$

Apar situațiile:

1. $k_2 = 2 \Rightarrow k_1 = \frac{9 \cdot 2 - 9}{5 \cdot 2 - 9} = 9 \Rightarrow k_1 + k_2 = 11;$
2. $k_2 = 3 \Rightarrow k_1 = \frac{9 \cdot 3 - 9}{5 \cdot 3 - 9} = 3 \Rightarrow k_1 + k_2 = 6;$
3. $k_2 = 9 \Rightarrow k_1 = \frac{9 \cdot 9 - 9}{5 \cdot 9 - 9} = 2 \Rightarrow k_1 + k_2 = 11,$

deci restul împărțirii la 5 a lui $k_1 + k_2$ este 1.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

SOLUȚII, CLASA A IX-A

2. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ o progresie aritmetică de rație r și $(b_n)_{n \geq 0}$ un șir dat de formula $b_n = [a_n]$, $\forall n \geq 0$. Să se arate că $(b_n)_{n \geq 0}$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $r \in \mathbb{Z}$.

Marius Mohonea, profesor, Focșani

Soluție. " \Leftarrow ":

Fie $r \in \mathbb{Z}$ și $a_n = a_0 + n \cdot r \Rightarrow b_n = [a_n] = [a_0 + n \cdot r] = [a_0] + n \cdot r$, $\forall n \geq 0 \Rightarrow (b_n)_{n \geq 0}$ este progresie aritmetică.

" \Rightarrow ":

Presupunem prin reducere la absurd că $r \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \{r\} \neq 0$.

Fie $q = b_1 - b_0$ rația progresiei aritmetice $(b_n)_{n \geq 0} \Rightarrow q = [a_1] - [a_0] = [a_0 + r] - [a_0] = [a_0 + \{r\} + [r]] - [a_0] = [a_0 + \{r\}] + [r] - [a_0] = [r] + \varepsilon$, unde $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Din $b_n = [a_n] \Rightarrow a_n - 1 < b_n \leq a_n$, $\forall n \geq 0 \Rightarrow a_n - 1 < b_0 + nq \leq a_n$, $\forall n \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_0 + n \cdot r - 1 < b_0 + n \cdot q$, $\forall n \geq 0$ (1)

și $b_0 + n \cdot q \leq a_0 + n \cdot r$, $\forall n \geq 0$ (2)

1. Dacă $\varepsilon = 0 \Rightarrow q = [r]$ și (1) $\Leftrightarrow a_0 + n([r] + \{r\}) - 1 < b_0 + n \cdot q \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a_0 + n \cdot [r] + n \cdot \{r\} - 1 < b_0 + n \cdot [r] \Leftrightarrow n \cdot \{r\} < b_0 - a_0 + 1 \Leftrightarrow n < \frac{b_0 - a_0 + 1}{\{r\}}$, $\forall n \geq 0$, fals!

2. Dacă $\varepsilon = 1 \Rightarrow q = [r] + 1$ și (2) $\Leftrightarrow b_0 + n([r] + 1) \leq a_0 + n \cdot ([r] + \{r\}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow b_0 + n \cdot [r] + n \leq a_0 + n \cdot [r] + n \cdot \{r\} \Leftrightarrow n \cdot (1 - \{r\}) < a_0 - b_0 \Leftrightarrow n \leq \frac{a_0 - b_0}{1 - \{r\}}$, $\forall n \geq 0$, fals!

Deci presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow r \in \mathbb{Z}$.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014**

SOLUȚII, CLASA A IX-A

3. Fie a, b, c numere reale strict pozitive cu proprietatea că $ab + bc + ca = 3$.

Să se determine minimul expresiei $\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{c^2 + a^2 + \frac{1}{b^2}}$.

Cristian Lazăr, profesor, Iași

Soluție. Notăm $E(a, b, c) = \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{c^2 + a^2 + \frac{1}{b^2}}$ și avem

$$E^2(a, b, c) = 2\sum a^2 + \sum \frac{1}{a^2} + 2\sum \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{1}{c^2}} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2}}.$$

Folosim acum inegalitățile:

- $\sum a^2 \geq \sum bc = 3$;
- $\sum \frac{1}{a^2} \geq \sum \frac{1}{ab} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1^2}{ab} + \frac{1^2}{bc} + \frac{1^2}{ca} \geq \frac{(1+1+1)^2}{ab+bc+ca} = \frac{9}{3} = 3$;
- $\sum \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{1}{c^2}} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2}} = \sum \sqrt{\left(a^2 + b^2 + \frac{1}{c^2}\right)\left(b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2}\right)} \geq$
 $\geq \sum \left(ab + bc + \frac{1}{ca}\right) = 2\sum ab + \sum \frac{1}{ca} \geq 2 \cdot 3 + 3 = 9$.

Am obținut astfel $E^2(a, b, c) \geq 2 \cdot 3 + 3 + 2 \cdot 9 = 27 \Rightarrow E(a, b, c) \geq 3\sqrt{3}$.

Pentru $a = b = c = 1$ se verifică ipoteza problemei, iar $E(1, 1, 1) = 3\sqrt{3}$, ceea ce spune că minimul căutat este $3\sqrt{3}$.

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
 “VICTOR VÂLCOVICI”
 EDIȚIA a XXII-a , BRĂILA, 17.05.2014**

CLASA A X-A

1. Rezolvați ecuația: $x^{\lg(5x)} = 2 \cdot 5^{1-\lg_2 x}$, pentru $x \in \left(\frac{1}{10}, \infty\right)$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f\left(\sum_{k=1}^{2015} C_{2015}^k \cdot x^k\right) \leq x \leq \sum_{k=1}^{2015} C_{2015}^k \cdot f^k(x), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Arătați că oricare ar fi $a_1, a_2, \dots, a_{2015} > 0$ avem:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2015}^2} \geq \frac{(f(a_1)+1)^{2015} + (f(a_2)+1)^{2015} + \dots + (f(a_{2015})+1)^{2015} - 2015}{\sqrt{2015}}$$

Carmen și Viorel Botea, Brăila

3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Să se arate că:

a) Dacă $d \in \mathbb{N}^*$ este un divizor al lui n și $z \in U_n, z^d \neq 1$, atunci $\sum_{k=0}^{\frac{n}{d}-1} z^{kd+r} = 0, \forall r \in \mathbb{N}$.

b) Dacă $n = pq, p, q \in \mathbb{N}, p, q \geq 2, (p, q) = 1$, atunci mulțimea U_n are cel puțin

$$2 + 2^q - 3$$

submulțimi nevide distincte cu proprietatea că suma elementelor pe care le conțin este nulă.

Carmen Antohe, profesor, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”

Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014

SOLUȚII, CLASA A X-A

1. Rezolvați ecuația: $x^{\lg(5x)} = 2 \cdot 5^{1-\log_2 x}$, pentru $x \in \left(\frac{1}{10}, \infty\right)$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

Logaritmăm și
obținem

$$\lg x \cdot (\lg 5 + \lg x) = \lg 2 + (1 - \log_2 x) \lg 5 \Leftrightarrow \lg x \cdot (1 - \lg 2 + \lg x) = \lg 2 + \left(1 - \frac{\lg x}{\lg 2}\right) \lg 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x \cdot (1 - \lg 2 + \lg x) = 1 - \frac{\lg x \cdot \lg 5}{\lg 2} \cdot \lg 2 \Leftrightarrow \lg 2 \cdot \lg^2 x + \lg 2 \cdot (1 - \lg 2) \cdot \lg x - \lg 2 + \lg x \cdot (1 - \lg 2) = 0$$

Notăm $\lg x = y$ și avem $y^2 \cdot \lg 2 + y \cdot (1 - \lg^2 2) - \lg 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (1 + \lg^2 2)^2 \Rightarrow y_1 = \lg 2 \Rightarrow x = 2,$

$$y_2 = -\frac{1}{\lg 2} \Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{\lg 2}} < \frac{1}{10} \text{ fals, deci } x = 2.$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”

Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014

SOLUȚII, CLASA A X-A

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f\left(\sum_{k=1}^{2015} C_{2015}^k \cdot x^k\right) \leq x \leq \sum_{k=1}^{2015} C_{2015}^k \cdot f^k(x), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Arătați că oricare ar fi $a_1, a_2, \dots, a_{2015} > 0$ avem:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2015}^2} \geq \frac{(f(a_1)+1)^{2015} + (f(a_2)+1)^{2015} + \dots + (f(a_{2015})+1)^{2015} - 2015}{\sqrt{2015}}$$

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

$$\text{Avem } f\left((x+1)^{2015} - 1\right) \leq x \leq f\left((x+1)^{2015} - 1\right), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Din prima inegalitate pentru } (x+1)^{2015} - 1 = y \Rightarrow f(y) \leq \sqrt[2015]{y+1} - 1, \forall y \in \mathbb{R}. (1)$$

Din a doua inegalitate obținem

$$\sqrt[2015]{x+1} \leq f(x)+1 \Rightarrow f(x) \geq \sqrt[2015]{x+1} - 1, \forall x \in \mathbb{R}, (2). \text{ Din (1), (2)} \Rightarrow f(x) = \sqrt[2015]{x+1} - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(a_i+1)^{2015} - 1 = a_i, \forall i = \overline{1, 2015}.$$

Avem:

$$\sqrt{2015} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2015}^2} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{2015} \Leftrightarrow 2015(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2015}^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_{2015})^2 \stackrel{C.B.S.}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{C.B.S.}{\Rightarrow} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2015}^2} \geq \frac{(f(a_1)+1)^{2015} + (f(a_2)+1)^{2015} + \dots + (f(a_{2015})+1)^{2015} - 2015}{\sqrt{2015}}.$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”

Ediția a XXII-a, Brăila, 17.05.2014

SOLUȚII, CLASA A X-A

3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $U_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$. Să se arate că:

a) Dacă $d \in \mathbb{N}^*$ este un divizor al lui n și $z \in U_n, z^d \neq 1$, atunci $\sum_{k=0}^{\frac{n}{d}-1} z^{kd+r} = 0, \forall r \in \mathbb{N}$.

b) Dacă $n = pq, p, q \in \mathbb{N}, p, q \geq 2, (p, q) = 1$, atunci mulțimea U_n are cel puțin $2^p + 2^q - 3$ submulțimi nevide distincte cu proprietatea că suma elementelor pe care le conțin este nulă.

Carmen Antohe, profesor, Brăila

Soluție:

$$a) \sum_{k=0}^{\frac{n}{d}-1} z^{kd+r} = z^r \sum_{k=0}^{\frac{n}{d}-1} (z^d)^k = z^r \cdot \frac{(z^d)^{\frac{n}{d}} - 1}{z^d - 1} = z^r \cdot \frac{z^n - 1}{z^d - 1} = 0$$

b) Fie $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ și mulțimile $A = \{1, \varepsilon^q, \varepsilon^{2q}, \dots, \varepsilon^{(p-1)q}\}$

$$B = \{1, \varepsilon^p, \varepsilon^{2p}, \dots, \varepsilon^{(q-1)p}\}.$$

$\varepsilon^p \neq 1, \varepsilon^q \neq 1$ (evident).

Notăm cu

$$A_i = \varepsilon^i A = \{\varepsilon^i, \varepsilon^{q+i}, \varepsilon^{2q+i}, \dots, \varepsilon^{(p-1)q+i}\}, \quad \forall i = \overline{0, q-1}$$

$$B_j = \varepsilon^j B = \{\varepsilon^j, \varepsilon^{p+j}, \varepsilon^{2p+j}, \dots, \varepsilon^{(q-1)p+j}\}, \quad \forall j = \overline{0, p-1}.$$

Conform punctului a), $\sum_{x \in A_i} x = 0, \forall i$ și $\sum_{y \in B_j} y = 0, \forall j$.

$$A_k \cap A_l = \emptyset \quad \forall k \neq l \quad \text{și} \quad B_k \cap B_l = \emptyset \quad \forall k \neq l$$

Fie $I = \{0, 1, \dots, q-1\}$ și $J = \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Atunci mulțimile $\bigcup_{i \in X} A_i, \forall X \in \mathcal{P}(I)$ și $\bigcup_{j \in Y} B_j, \forall Y \in \mathcal{P}(J)$ îndeplinesc proprietățile din enunț (suma elementelor este nulă și ele sunt disjuncte). Cum $\text{card} \mathcal{P}(I) = 2^q$, iar $\text{card} \mathcal{P}(J) = 2^r$, rezultă că avem $2^q + 2^r - 3$ mulțimi cu proprietatea cerută.