

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a XI-a
14.02.2014

Subiectul I.(30 puncte)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Să se arate că dacă $X \in M_3(C)$ astfel încât $AX = XA$, atunci $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}; a, b, c \in C$;
- b) Determinați $X^n, n \in N^*$, unde X sunt matricele de la punctul a) cu proprietatea că $a = b = 1, c \in C$;
- c) Să se demonstreze că ecuația $X^3 = A$ nu are soluții în $M_3(C)$.

prof. Cristian Petru Pop, ISJ Cluj

Subiectul II.(20 puncte)

Se dă șirul $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k(2k+1)} - \sqrt{(2k-1)(2k+2)})$.

- a) Să se demonstreze că $\frac{1}{2(k+1)} < \sqrt{2k(2k+1)} - \sqrt{(2k-1)(2k+2)} < 1; \forall k \in N^*$
- b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

prof. Alb Nicolae, Liceul Teoretic "O. Goga" Huedin

Subiectul III.(20 puncte)

Fie funcția $f : (-1, 1) \rightarrow R, f(t) = \frac{2t}{1-t^2}$. Să se calculeze:

- a) $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \prod_{k=1}^n \left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ ori}} \right) (tgx)$;
- b) $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ ori}} \right) (tgx) \right)$, unde $x \in \left(-\frac{\pi}{2^{n+1}}, \frac{\pi}{2^{n+1}} \right), n \in N^*$ fixat.

prof. Ilie Diaconu, Liceul Teoretic "Avram Iancu", Cluj-Napoca

Subiectul IV.(20 puncte) Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

- a) Scrieți rezultatul determinantului $\det(A \cdot B^t)$ sub formă de produs;
- b) Scrieți rezultatul determinantului $D = \begin{vmatrix} (x^2 + 1)^2 & (xy + 1)^2 & (xz + 1)^2 \\ (xy + 1)^2 & (y^2 + 1)^2 & (yz + 1)^2 \\ (xz + 1)^2 & (yz + 1)^2 & (z^2 + 1)^2 \end{vmatrix}$ sub formă de produs.

prof. Anca Cristina Hodorocea, ISJ Cluj

SUCCES!

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpe efectiv de lucru - 3 ore.