OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a IX-a
14.02.2014

Subiectul I.(40 puncte)

a) Arătaţi că $\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{a+b}<\frac{a+c}{a+b+c}$, oricare ar fi $a,b,c\in(0,\infty)$.

b) Demonstraţi inegalitatea $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$, oricare ar fi $a,b,c\in(0,\infty)$.

c) Justificând răspunsul, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei „există $a,b,c,d\in(0,\infty)$ astfel încât $\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}\in\mathbb{N}$"

prof. Viorel Lupşor, L.T. „O. Ghibu" Cluj-Napoca

Subiectul II.(10 puncte)

Fie $a,b,c\in[1,\infty)$ astfel încât $a+b+c=4$. Să se arate că:
$\sqrt{ab(c-1)}+\sqrt{bc(a-1)}+\sqrt{ca(b-1)}\leq\sqrt{ab+bc+ca}$. În ce caz avem egalitate?

prof.Ilie Diaconu, Liceul Teoretic"Avram Iancu",Cluj-Napoca

Subiectul III.(20 puncte)

1. Fie k un număr natural impar. Să se demonstreze că:
$\left[\sqrt{k^2}\right]+\left[\sqrt{k^2+2}\right]+\left[\sqrt{k^2+4}\right]+\ldots+\left[\sqrt{(k+2)^2-2}\right]=(k+1)(2k+1)$.

2. Să se calculeze suma:
$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{5}\right]+\ldots+\left[\sqrt{4n^2+4n-1}\right]$, unde $n\in\mathrm{N}^*$.

prof. Nicolae Alb, Lieul Teoretic "Octavian Goga" Huedin

Subiectul IV.(20 puncte)

Se consideră paralelogramul ABCD. O dreaptă oarecare taie dreptele AD, BD şi respectiv CD în punctele A_1, B_1 şi C_1. Arătaţi că dacă $\overrightarrow{DA_1}=a\cdot\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB_1}=b\cdot\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC_1}=c\cdot\overrightarrow{DC}$, atunci are loc inegalitatea $2b\leq\sqrt{ac}$. Când are loc egalitate?

prof. Eugen Jecan, Colegiul Naţional "Andrei Mureşanu" Dej

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. ***SUCCES!***
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

P-ța Ștefan cel Mare nr. 4, Cluj - Napoca
Tel: +40 (0) 264 590 778, Fax: +40 (0) 264 592 832
www.isjcj.ro ,cluj@isjcj.ro