Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a X-a M_1

Problema 1

Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarei propoziţii: "*Există numere iraţionale care ridicate la puterea număr iraţional să dea număr raţional*".

Problema 2

Fie $\varepsilon = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ şi $z \in \mathbb{C}$. Demonstraţi că $(z-1)^2 + (z-\varepsilon)^2 + (z-\overline{\varepsilon})^2 = 3z^2$.

Problema 3

Să se demonstreze că dacă $a,b,c \in (0,\infty)$, atunci $\lg^2\left(\dfrac{ab}{c}\right) + \lg^2\left(\dfrac{bc}{a}\right) + \lg^2\left(\dfrac{ca}{b}\right) \geq \lg \dfrac{abc}{\sqrt[4]{1000}}$.

Problema 4

Să se determine $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a X-a M_2

Problema 1

Aflați $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}$.

Problema 2

Arătați că expresia $E = \dfrac{\log_2 x^2 + \log_2 x^3 + \ldots + \log_2 x^{2014}}{\log_7 x^3 + \log_7 x^4 + \ldots + \log_2 x^{2015}}$ este independentă de x, pentru orice $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$.

Problema 3

Să se determine suma valorilor lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care are sens expresia $E(x) = \log_{x^2-3x+2}\left(16 - x^2\right)$.

Problema 4

Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z + |z| = 8 + 4i$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.