limpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XI-a M_1

Problema 1

Se consideră determinantul $f(x)=\begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2a} \end{vmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

- **a)** Pentru ce valori ale lui $a\in\mathbb{R}$, ecuația $f(x)=0$ are soluții reale?
- **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x)=0$ are toate soluțiile numere reale strict negative.

Problema 2

Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ şi $A,B\in M_n(\mathbb{Q})$ două matrice cu proprietatea că $A+B=AB$. Arătați că pentru orice $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, proprietățile următoare sunt echivalente:

- **1)** $A+B+B^2+\ldots+B^{k-1}=O_n$.
- **2)** $B^k=O_n$.

Problema 3

Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^4+k}}\right)^{n^2+1}$.

Problema 4

Să se determine în funcție de $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\alpha}\left(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XI-a M_2

Problema 1

Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$. Să se determine domeniul maxim de definiție şi asimptotele la graficul funcției.

Problema 2

Să se determine $x \in \mathbb{R}$ poentru care $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Problema 3

Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x^2 - 1)}{\operatorname{tg}(x^3 - 1)} \cdot \dfrac{e^{x^2-1} - 1}{x^4 - 1}$.

Problema 4

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să de calculeze $\det(A + 3I_3)$.

b) Să se verifice dacă $A^5 + 4A = O_3$.

c) Să se calculeze $A + A^5 + A^9 + \ldots + A^{2013}$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.